

参数化后弗里德曼(PPF)框架

1 修改引力理论与宇宙学

在宇宙学模型中，引起宇宙加速膨胀的因素由暗能量描述，宇宙学家也提出了许多的暗能量模型候选者，如 Quintessence、Phantom、Quintom等。但是否真的存在类似的暗能量始终未成定数，因为并不只有暗能量可以引起宇宙的加速膨胀，应用到宇宙学的修改引力模型同样可以作为引起宇宙加速膨胀的候选者，如f(R)、DGP等。所以研究修改引力理论的宇宙学行为与实验验证是十分必要的。

2 PPF框架的引入

宇宙的加速膨胀可以从暗能量的角度解释，其膨胀的行为可以由暗能量在宇宙中的占比(Ω_{DE})与状态方程(w)决定，如果暗能量是不均匀的，在宇宙大尺度结构形成的检验中也有附加的参数可以表征其不均匀性。而能动量的协变守恒($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$)则要求暗能量必须至少在大尺度上对时空或是引力扰动作出响应。

我们希望修改引力模型在宇宙学上的行为也可以像暗能量一样被参数化描述，以便计算其扰动引起的各种宇宙学效应，同时要求满足理论是能动量守恒的度规理论地条件。具体地，在大尺度(Super-horizon)上，结构演化必须与宇宙背景演化相容；中间尺度上的行为应由标量-张量理论与修正的泊松方程描述；为了使模型通过严格的局部引力检验，那么局部的标量自由度则需要被约束。

所以为了描述这些条件，宇宙学家提出了一种参数化的方法：Parameterized Post-Friedmann (PPF) 框架，它参数化地描述了修改引力模型在三个不同状态下的行为。

3 修改引力理论的三个状态

3.1 超视界(Super-horizon)尺度

在对背景演化的讨论中，我们仍可以采用暗能量的描述方式，构造一个有效的能量密度，为了简单起见我们忽略曲率和辐射：

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{3}{8\pi G} (H^2 - H_m^2 a^{-3}) \quad (1)$$

其中：

$$H_m^2 \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho_m(\ln a = 0) \quad (2)$$

从而我们可以得到其有效占比与状态方程：

$$\Omega_{\text{eff}} = 8\pi G \rho_{\text{eff}} / 3H_0^2 \quad (3)$$

$$1 + w_{\text{eff}}(\ln a) \equiv -\frac{1}{3} \frac{\rho'_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} = -\frac{1}{3} \frac{2HH' + 3H_m^2 a^{-3}}{H^2 - H_m^2 a^{-3}} \quad (4)$$

扰动宇宙中的超视界度规涨落可以看作是在相同的修正的弗里德曼方程下作为一个单独的宇宙演化的，但参数不同。

接下来需要处理的是超视界尺度上的标量涨落。在不同的规范中，我们采用不同的记号标记标量扰动，在牛顿规范中，

Φ 表示空间曲率扰动， Ψ 表示引力势即度规时间分量的扰动；在共动规范中，则表示为 ζ 和 ξ 。

在共动规范中，绝热初始条件的约束看起来特别简单，即度量微扰的曲率或空间分量 ζ 零阶守恒：

$$\zeta' = \mathcal{O}(k_H^2 \zeta) \quad (5)$$

有规范变换方程：

$$\zeta = \Phi - V_m/k_H \quad (6)$$

能量守恒方程：

$$V'_m + V_m = k_H \Psi \quad (7)$$

联立上面两个方程可以得到扰动的演化方程（可作为练习）：

$$\Phi'' - \Psi' - \frac{H''}{H'} \Phi' - \left(\frac{H'}{H} - \frac{H''}{H'} \right) \Psi = \mathcal{O}(k_H^2 \zeta) \quad (8)$$

区分模型与模型的，是 Φ 和 Ψ 之间的关系，用度规比 g 参数化，其定义为：

$$g \equiv \frac{\Phi + \Psi}{\Phi - \Psi} = \frac{k_H \zeta + V'_m + 2V_m}{k_H \zeta - V'_m} \quad (9)$$

其中 $' = d/d \ln a$ ， $k_H = k/aH$ 。 V_m 是物质在共动规范和牛顿规范中的标量速度涨落。

现在绝热微扰的超视界标量度规涨落完全由膨胀历史 H 和度规比 g 决定，这就达到了我们参数化的目的。

3.2 准静态条件

对于视界内的线性扰动，当度规涨落的时间导数与空间梯度相比可以忽略时，修正的场方程简化为修正的泊松方程：

$$k^2 \Phi_- = \frac{4\pi G}{1 + f_G} a^2 \rho_m \Delta_m \quad (10)$$

其中

$$\Phi_- = \frac{\Phi - \Psi}{2} \quad (11)$$

Φ_- 是引力红移和透镜效应涉及的度规组合。

Δ_m 是共动规范中的物质分数密度扰动。

f_G 对牛顿常数进行了可能与时间相关的修正，并且两个度规涨落之间的关系再次由 g 来参数化。我们假设 f_G 中的空间涨落导致了线性约束中的二阶修正，我们称之为准静态近似 ($k_H \geq 1$ 时成立)。

另一方面，密度涨落由牛顿极限下的守恒方程决定：

$$\begin{aligned} \Delta'_m &= -k_H V_m \\ V'_m + V_m &= k_H \Psi = (g - 1) k_H \Phi_- \end{aligned} \quad (12)$$

结合修改的泊松方程，并将 f_G 视为常数，可以得到（可作为练习）：

$$\Phi''_- + \left(4 + \frac{H'}{H} \right) \Phi'_- + \left[3 + \frac{H'}{H} + \frac{3}{2} \frac{H_m^2}{(1 + f_G) H^2 a^3} (g - 1) \right] \Phi_- = 0 \quad (13)$$

注意，当 $w_{\text{eff}} \neq -1$ ， $g \neq 0$ 或 $f_G \neq 0$ 时，这个准静态方程与超视界演化方程不等价。

3.3 相对论非线性区域

在修改引力理论中的非线性动力学应该要能回到广义相对论，因为这在小尺度上是可以被精确限制的，需要理论本身可以满足要求。

4 PPF 线性参数化

接下来我们需要想办法将上述三个区域连接起来，主要是连接线性区域。

先把超视界尺度和准静态区域协调。在准静态条件下我们使用了牛顿极限下的守恒方程，我们现在要把它修改为由 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 导出的守恒方程，具体如下：

$$\begin{aligned}\Delta'_m &= -k_H V_m - 3\zeta' \\ V'_m + V_m &= (g-1)k_H \Phi_-\end{aligned}\quad (14)$$

其中：

$$\zeta' = (g+1)\Phi'_- + (1-g+g')\Phi_- - \frac{H'}{H} \frac{V_m}{k_H} \quad (15)$$

可由前文的规范变换导出（可作为练习）。

为了匹配超视界尺度的行为，我们为泊松方程加上一个修正项 Γ ：

$$k^2[\Phi_- + \Gamma] = 4\pi G a^2 \rho_m \Delta_m. \quad (16)$$

现在我们要求上述方程能在 $k_H \rightarrow 0$ 的条件下回到超视界尺度的扰动演化方程

我们的目的是得到 Γ 的演化方程，除了 g 以外， ζ' 的零阶行为可以由可能含时的函数 f_ζ 参数化：

$$\lim_{k_H \rightarrow 0} \zeta' = \frac{1}{3} f_\zeta k_H V_m. \quad (17)$$

结合上面的各种关系，我们可以推导出 Γ 的演化方程（可作为练习）：

$$\Gamma' + \Gamma = S \quad (k_H \rightarrow 0) \quad (18)$$

$$S = -\left[\frac{1}{g+1} \frac{H'}{H} + \frac{3}{2} \frac{H_m^2}{H^2 a^3} (1 + f_\zeta) \right] \frac{V_m}{k_H} + \left[\frac{g' - 2g}{g+1} \right] \Phi_- \quad (19)$$

注意式中的 k_H 只保留了零阶。

同时，在小尺度上修正的泊松方程需要恢复到准静态：

$$\Gamma = f_G \Phi_-, \quad (k_H \rightarrow \infty) \quad (20)$$

最后，为了在这两个极限之间插值，我们取 Γ 的完整运动方程为：

$$(1 + c_\Gamma^2 k_H^2) [\Gamma' + \Gamma + c_\Gamma^2 k_H^2 (\Gamma - f_G \Phi_-)] = S. \quad (21)$$

其中 c_Γ 为插值参数。

总而言之，给定一个膨胀历史 $H(a)$ ，PPF 参数化由3个函数和1个参数定义：

- 度规比 $g(\ln a, k_H)$
- 超视界度规和密度关系 $f_\zeta(\ln a)$
- 牛顿常数的修正 $f_G(\ln a)$
- 中间尺度的插值参数 c_Γ

在特定的模型中，这些函数本身也可以被简单地参数化。

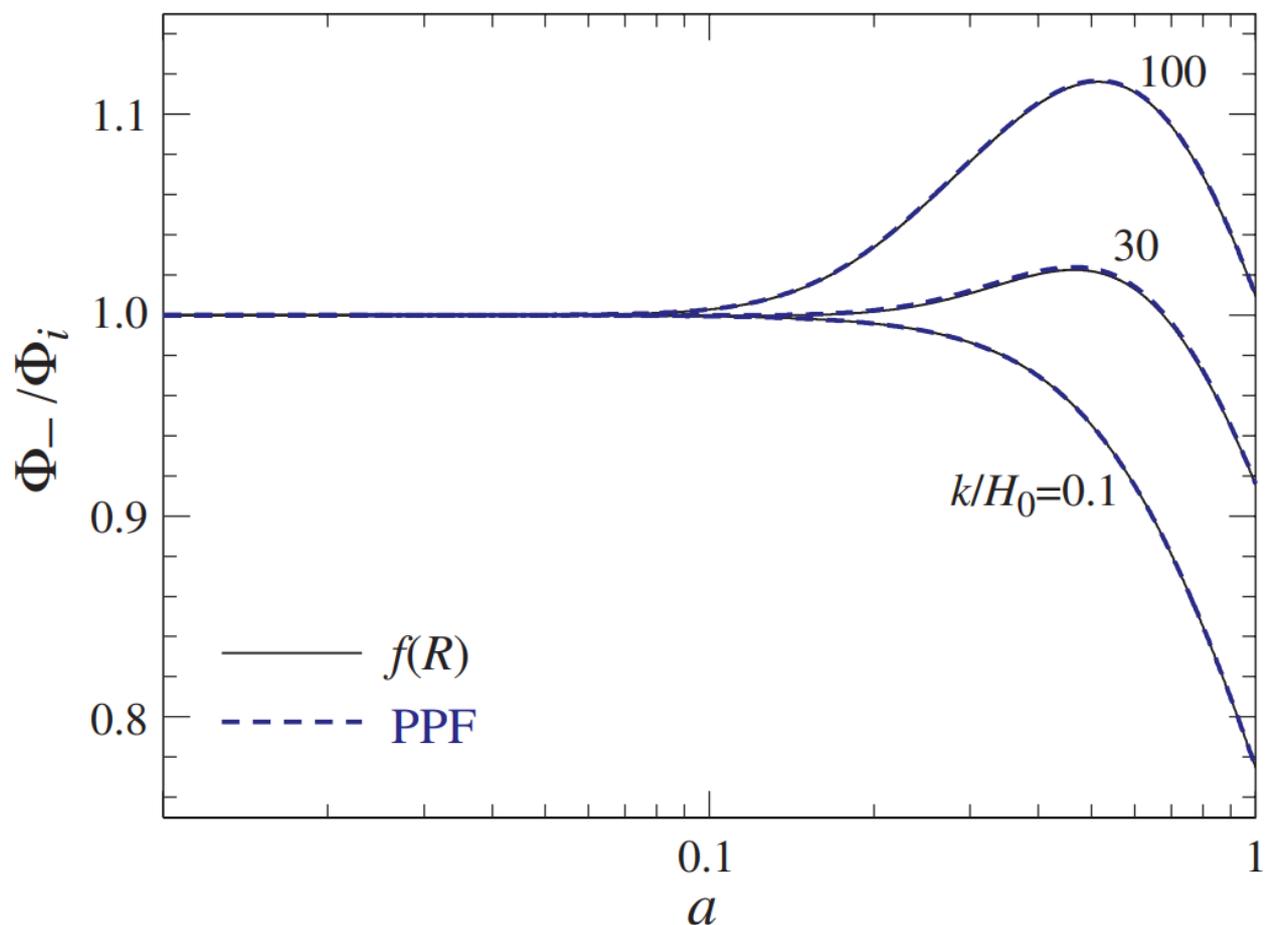
特别是在处理 $g(\ln a, k_H)$ 时常用插值法连接两个不同的尺度，在这里列出：

$$g(\ln a, k) = \frac{g_{SH} + g_{QS} (c_g k_H)^{n_g}}{1 + (c_g k_H)^{n_g}}, \quad (22)$$

c_g 与 n_g 为插值参数。

5 总结

在选定正确的参数与函数时，PPF 框架精确地描述了修改引力模型在宇宙学中的线性扰动，如图为 $f(R)$ 引力模型与相应 PPF 扰动参量演化的比较：



在研究 CMB 中的积分 Sachs-Wolfe 效应、大尺度引力透镜和星系结团等现象时，可以分别用它来代替这些模型中较为复杂的动力学部分。