宇宙大尺度结构

1 关联函数

本节主要介绍大尺度结构中关联函数相关知识。

1.1 非均匀性

我们在宇宙扰动理论中早已熟知的物质非均匀性可以表示为:

$$\begin{gathered}\rho(t,\mathbf{x})=\bar{\rho}(t)+\delta\rho(t,\mathbf{x})\\ p(t,\mathbf{x})=\bar{p}(t)+\delta p(t,\mathbf{x})\end{gathered} \tag{1}$$

定义相对密度扰动:

$$\delta(t,\mathbf{x})\equiv\frac{\delta\rho(t,\mathbf{x})}{\bar{\rho}(t)} \tag{2}$$

在统计中，我们习惯用到系综平均的概念，定义为:

$$\langle f\rangle\equiv\int d\xi\,\mathrm{P}(\xi)f(\xi) \tag{3}$$

可以理解为期望。

宇宙学原理使得:

$$\langle\delta\rho\rangle=0\qquad\langle\delta\rangle=0 \tag{4}$$

所以光用 $\langle\delta\rangle$ 来表征非均匀性是不行的，但它的平方的期望可以，我们称之为密度扰动的方差:

$$\left\langle\delta^2\right\rangle=\frac{\left\langle\delta\rho^2\right\rangle}{\bar{\rho}^2} \tag{5}$$

1.2 自相关函数

密度扰动的方差给了我们整个宇宙扰动的强度信息，但没有给我们扰动的分布信息，为了获取更多信息，我们定义一个密度的两点自相关函数，简称两点关联函数:

$$\xi\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right)\equiv\left\langle\delta\left(\mathbf{x}_1\right)\delta\left(\mathbf{x}_2\right)\right\rangle \tag{6}$$

出于宇宙学原理的规定，密度扰动的两点关联函数与两点具体位置无关，只与两点的间距有关:

$$\xi(r)\equiv\langle\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle \tag{7}$$

1.3 功率谱

我们可以将密度扰动展开成傅里叶级数:

$$\delta(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{8}$$

其傅里叶系数为:

$$\delta_{\mathbf{k}}=\frac{1}{V}\int_V\delta(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3x \tag{9}$$

其中 V 可以看做一个很大空间的体积，有周期性边界条件且边界无影响。

我们定义它的两点关联函数为（可作为练习）：

$$\begin{aligned}\left\langle\delta_{\mathbf{k}}^{*}\delta_{\mathbf{k}'}\right\rangle &= \frac{1}{V^2}\int d^3xe^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\int d^3x'e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'}\left\langle\delta(\mathbf{x})\delta\left(\mathbf{x}'\right)\right\rangle \\ &= \frac{1}{V^2}\int d^3xe^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\int d^3re^{-i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})}\langle\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle \\ &= \frac{1}{V^2}\int d^3re^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}\xi(\mathbf{r})\int d^3xe^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{V}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\int d^3re^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\xi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}P(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{10}$$

其中我们定义了密度扰动的功率谱：

$$P(\mathbf{k}) \equiv V\left\langle\left|\delta_{\mathbf{k}}\right|^2\right\rangle = \int d^3re^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\xi(\mathbf{r}) \tag{11}$$

我们可以发现功率谱其实就是两点关联函数变换到傅里叶空间，所以有：

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3ke^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}P(\mathbf{k}) \tag{12}$$

有各向同性性性可以得到一维的功率谱和两点关联函数间的傅里叶变换：

$$\begin{aligned}P(k) &= \int_0^\infty \xi(r)\frac{\sin kr}{kr}4\pi r^2dr \\ \xi(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty P(k)\frac{\sin kr}{kr}4\pi k^2dk\end{aligned} \tag{13}$$

于是密度扰动的方差可以表示成：

$$\left\langle\delta^2\right\rangle \equiv \xi(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty P(k)4\pi k^2dk = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^\infty k^3P(k)d\ln k \equiv \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}(k)d\ln k \tag{14}$$

这里又定义了另一种无量纲的功率谱：

$$\mathcal{P}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2}P(k) \tag{15}$$

1.4 窗口函数

在实际观测中，我们需要在一定的尺度范围内研究我们的宇宙，为了排除过小的尺度，我们定义窗口函数 $W(\mathbf{r})$ 来过滤出小尺度。它的性质是在我们规定区域之外的函数值接近零，在区域内相对大，并且满足归一化条件：

$$\int d^3rW(\mathbf{r}) = 1 \tag{16}$$

定义经过过滤后的密度场是将其与窗口函数卷积：

$$\delta(\mathbf{x},R) \equiv (\delta * W)(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{x}'\delta\left(\mathbf{x}'\right)W\left(\mathbf{x}'-\mathbf{x}\right) \tag{17}$$

在傅里叶空间：

$$\delta(\mathbf{k},R) = \delta(\mathbf{k})W(\mathbf{k}) \tag{18}$$

R 为我们规定区域的半径。

例如，我们可以定义高帽窗口函数：

$$W_T(\mathbf{r}) \equiv \left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)^{-1}, \quad |\mathbf{r}| \leq R \tag{19}$$

其在区域外的值都为 0，相当于将扰动在窗口内作平均。

还有数学上更实用的高斯窗口函数：

$$W_G(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}R^3} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{r}|^2/R^2} \tag{20}$$

1.5 幂律谱

在某个观测区间内我们可以用简单的幂律关系来描述功率谱，如：

$$\xi(r) \propto r^{-\gamma} \qquad P(k) \propto k^n \tag{21}$$

对于功率谱，我们写成如下形式：

$$P(k) = A^2 \left(\frac{k}{k_p}\right)^n \qquad \mathcal{P}(k) = A^2 \left(\frac{k}{k_p}\right)^{n+3} \tag{22}$$

其中 k_p 被称为主尺度，A 定义为在主尺度的功率谱谱幅，注意它在上面两个式子里的取值是不一样的。

我们由此定义谱指数：

$$n(k) \equiv \frac{d\ln P}{d\ln k} \tag{23}$$

它是用对数坐标画功率谱 $P(k)$ 时的斜率。

1.6 星系两点关联函数

我们可以定义星系数密度扰动，假设其与物质扰动相等：

$$\delta_g \equiv \frac{\delta n}{\bar{n}} = \delta \equiv \frac{\delta\rho_m}{\bar{\rho}_m} \tag{24}$$

那么在某一体积内发现一个星系的概率为：

$$dP_1 = \langle n(\mathbf{x})\rangle dV_1 = \langle \bar{n} + \delta n(\mathbf{x})\rangle dV_1 = \bar{n}dV_1 \tag{25}$$

发现一个星系对的概率为：

$$\begin{aligned} dP_{12} &= \langle n(\mathbf{x})n(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle dV_1 dV_2 = \bar{n}^2 \langle [1+\delta(\mathbf{x})][1+\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r})]\rangle dV_1 dV_2 \\ &= \bar{n}^2[1 + \langle\delta(\mathbf{x})\rangle + \langle\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle + \langle\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle]dV_1 dV_2 \\ &= \bar{n}^2[1 + \langle\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle]dV_1 dV_2 \end{aligned} \tag{26}$$

上下两式相除，我们可以得到星系两点关联函数的定义式：

$$dP \equiv \bar{n}\,[1+\xi_g(\mathbf{r})]dV = \bar{n}[1 + \langle\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle]dV \tag{27}$$

然而由于星系的行为并不完全和物质相同，我们定义一个星系偏袒数：

$$b_g \equiv \frac{\delta_g}{\delta_m} \quad \Rightarrow \quad \xi_g = b_g^2 \xi \tag{28}$$

2 牛顿扰动理论

本节主要介绍大尺度结构中常用的牛顿扰动理论。

2.1 金斯方程

牛顿力学里的守恒方程、流体方程、引力方程分别为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t'} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{29}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t'} + (\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla_{\mathbf{r}}p + \nabla_{\mathbf{r}}\tilde{\Phi} = 0 \tag{30}$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2\tilde{\Phi} = 4\pi G\rho \tag{31}$$

由于我们需要在共动坐标系 $(t,\mathbf{x})$ 讨论问题，而上式所用坐标系并 $(t',\mathbf{r})$ 非共动坐标，两系间的坐标变换为：

$$t' = t \quad \mathbf{r} = a(t)\mathbf{x} \tag{32}$$

我们可以由此推导出两者导数算符的变换关系:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - H\mathbf{x}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} \qquad \nabla_{\mathbf{r}} = \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}} \tag{33}$$

我们在原方程上作线性微扰:

$$\rho\left(t',\mathbf{r}\right) = \bar{\rho}\left(t'\right) + \delta\rho\left(t',\mathbf{r}\right) \tag{34}$$
$$p\left(t',\mathbf{r}\right) = \bar{p}\left(t'\right) + \delta p\left(t',\mathbf{r}\right) \tag{35}$$
$$\mathbf{u}\left(t',\mathbf{r}\right) = H\left(t'\right)\mathbf{r} + \mathbf{v}\left(t',\mathbf{r}\right) \tag{36}$$
$$\tilde{\Phi}\left(t',\mathbf{r}\right) = \frac{2\pi G}{3}\bar{\rho}\left(t'\right)r^2 + \Phi\left(t',\mathbf{r}\right) \tag{37}$$

其中最后一式用了均匀密度分布的球对称引力势作为平均势。

导出扰动方程（可作为练习）:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t'} + 3H\delta\rho + H\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\delta\rho + \bar{\rho}\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{38}$$
$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t'} + H\mathbf{v} + H\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{v} + \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla_{\mathbf{r}}\delta p + \nabla_{\mathbf{r}}\Phi = 0 \tag{39}$$
$$\nabla_{\mathbf{r}}^2\Phi = 4\pi G\delta\rho \tag{40}$$

并将其改写为共动坐标:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + 3H\delta\rho + \frac{\bar{\rho}}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{41}$$
$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + H\mathbf{v} + \frac{1}{a\bar{\rho}}\nabla_{\mathbf{x}}\delta p + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\Phi = 0 \tag{42}$$
$$\nabla_{\mathbf{x}}^2\Phi = 4\pi Ga^2\delta\rho \tag{43}$$

再利用流体的守恒方程:

$$\dot{\rho} + 3H\rho = 0 \tag{44}$$

可以推导出（可作为练习）:

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{45}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(a\mathbf{v}) + \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla_{\mathbf{x}}\delta p + \nabla_{\mathbf{x}}\Phi = 0 \tag{46}$$
$$\nabla_{\mathbf{x}}^2\Phi = 4\pi Ga^2\bar{\rho}\delta \tag{47}$$

在傅里叶空间对于标量扰动，上式化为:

$$\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \frac{ikv_{\mathbf{k}}}{a} = 0 \quad\Rightarrow\quad v_{\mathbf{k}} = i\frac{a}{k}\dot{\delta}_{\mathbf{k}} \tag{48}$$
$$\frac{d}{dt}(av_{\mathbf{k}}) + ik\frac{\delta p_{\mathbf{k}}}{\bar{\rho}} + ik\Phi_{\mathbf{k}} = 0 \tag{49}$$
$$\Phi_{\mathbf{k}} = -4\pi G\left(\frac{a}{k}\right)^2\bar{\rho}\delta_{\mathbf{k}} \tag{50}$$

整理上面的方程组，消掉引力势，我们可以推出标量扰动的演化方程（可作为练习）:

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} = -\frac{k^2}{a^2}\frac{\delta p_{\mathbf{k}}}{\bar{\rho}} + 4\pi G\bar{\rho}\delta_{\mathbf{k}} \tag{51}$$

若定义声速:

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \tag{52}$$

在绝热扰动下有如下条件:

$$\frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \tag{53}$$

密度演化方程简化为:

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left[\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\bar{\rho}\right]\delta_{\mathbf{k}} = 0 \tag{54}$$

上式被称作金斯方程。

方程左边第三项的系数符号决定了扰动的演化模式，定义金斯波数:

$$k_J = \frac{a\sqrt{4\pi G\bar{\rho}}}{c_s} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{c_s}\mathcal{H} \tag{55}$$

其对应的尺度称为金斯尺度:

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = 2\pi c_s\sqrt{\frac{2}{3}}\mathcal{H}^{-1} \tag{56}$$

我们可以发现在金斯尺度内的扰动波数使得第三项系数为正，于是方程的解为震荡模式，若尺度远小于金斯尺度，则方程可以化为:

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \frac{c_s^2 k^2}{a^2}\delta_{\mathbf{k}} = 0 \tag{57}$$

对于远大于金斯尺度的扰动，方程又可化为:

$$\ddot{\delta}_{\mathrm{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathrm{k}} - 4\pi G\bar{\rho}\delta_{\mathrm{k}} = 0 \tag{58}$$

以忽略压强的 CDM 宇宙为例，我们结合背景解得其扰动为:

$$\delta_{\mathbf{k}}(t) = b_1 t^{2/3} + b_2 t^{-1} \tag{59}$$

对于有多种组成成分的流体，我们认为他们之间除了引力不发生其他相互作用，他们各自的扰动方程改为:

$$\begin{gathered} \ddot{\delta}_{i\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{i\mathbf{k}} = -\frac{k^2}{a^2}\frac{\delta p_{i\mathbf{k}}}{\bar{\rho}_i} + 4\pi G\delta\rho_{\mathbf{k}} \\ \delta\rho_{\mathbf{k}} = \sum_j \bar{\rho}_j \delta_{j\mathbf{k}} \end{gathered} \tag{60}$$

和前文结果相比，有所改变的只是方程右边的最后一项，引力势来自所有成分之和，原因在于引力作用的不可忽略。

2.2 梅萨洛方程

对于有些流体我们可以忽略其扰动，视其为均匀，称之为平滑流体，但其对背景的影响不能忽略，所以我们的扰动方程:

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left[\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\bar{\rho}_m\right]\delta_{\mathbf{k}} = 0 \tag{61}$$

背景部分，如 $a(t), H(t)$ 都加入了平滑流体的作用，而扰动部分则不带有平滑部分。

现在我们考虑平坦宇宙的 CDM 和辐射模型，我们把辐射看做平滑部分，只考虑 CDM 的扰动。

CDM 的状态方程决定了它的声速为 0，说明其金斯尺度也为 0，说明其解不会是震荡解。

具体地，扰动方程改写为:

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_{\mathbf{k}} = 0 \tag{62}$$

为了测试平滑流体的作用，我们把背景方程写出:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho} \tag{63}$$

其中:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r \tag{64}$$

我们希望把背景和扰动联立以解出扰动随时间演化的行为，我们做一个变量替换:

$$y \equiv \frac{a}{a_{\text{eq}}} = \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r} \tag{65}$$

我们可以推出以下方程（可作为练习）:

$$\delta'' + \frac{2+3y}{2y(1+y)}\delta' - \frac{3}{2y(1+y)}\delta = 0 \tag{66}$$

上式被称为梅萨洛方程。

解方程得到 CDM 的扰动模式:

$$\delta = \delta_{\text{prim}}\left(1 + \frac{3y}{2}\right) = \delta_{\text{prim}}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a}{a_{\text{eq}}}\right) \tag{67}$$

在 CDM 演化后期，物质扰动随尺度因子线性增长。

2.3 亚视界尺度的扰动

牛顿扰动理论只在亚视界尺度成立，即 $k \gg \mathcal{H}$，接下来我们在该尺度内讨论宇宙的扰动。

我们的宇宙由以下五部分组成:

1. 冷暗物质
2. 重子物质
3. 光子
4. 中微子
5. 暗能量

他们的密度之和为:

$$\rho = \underbrace{\rho_c + \rho_b}_{\rho_m} + \underbrace{\rho_\gamma + \rho_\nu}_{\rho_r} + \rho_d \tag{68}$$

在退耦之前，重子和光子可以相互作用，我们在退耦之前的阶段将二者作为整体:

$$\rho_{b\gamma} = \rho_b + \rho_\gamma \tag{69}$$

而辐射部分又可以看做平滑流体，所以我们宇宙的组成成分可以写为:

$$\begin{aligned} t < t_{\text{dec}}: &\quad \rho = \rho_c + \rho_{b\gamma} + \rho_s \qquad (\rho_s = \rho_\nu + \rho_d) \\ t > t_{\text{dec}}: &\quad \rho = \rho_c + \rho_b + \rho_s \quad (\rho_s = \rho_\gamma + \rho_\nu + \rho_d) \end{aligned} \tag{70}$$

我们知道重子物质约为冷暗物质的五分之一，我们在考虑 CDM 扰动时可以忽略重子成分:

$$\rho_m \approx \rho_c \tag{71}$$

2.3.1 重子-CDM 模型

然而对于观测来讲，我们能够观测到的是重子成分的结构，所以我们还需要考虑它的扰动模式。我们考虑如下成分：

$$\rho = \rho_c + \rho_b + \rho_s \tag{72}$$

平滑部分由辐射与暗能量组成。

CDM 和重子物质组成总物质：

$$\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_c + \bar{\rho}_b \tag{73}$$

则他们联合的扰动定义为：

$$\delta = \frac{\delta\rho_c + \delta\rho_b}{\bar{\rho}_c + \bar{\rho}_b} \tag{74}$$

忽略物质成分的压强，于是他们分别有扰动方程：

$$\ddot{\delta}_c + 2H\dot{\delta}_c = 4\pi G\bar{\rho}_m\delta \tag{75}$$
$$\ddot{\delta}_b + 2H\dot{\delta}_b = 4\pi G\bar{\rho}_m\delta \tag{76}$$

再定义一个 B-CDM 的熵扰动：

$$S_{cb} \equiv \delta_c - \delta_b \tag{77}$$

可以得到熵扰动方程：

$$\ddot{S}_{cb} + 2H\dot{S}_{cb} = 0 \tag{78}$$

对于物质主导的宇宙，上述方程的解为：

$$S_{cb} = A + Bt^{-1/3} \tag{79}$$

同时我们有忽略重子与压强的 CDM 的增长模式：

$$\delta_c = Ct^{2/3} + Dt^{-1} \sim Ct^{2/3} \tag{80}$$

2.3.2 ΛCDM 模型

对于后期加速膨胀的宇宙，暗能量对背景起到了很大的作用，但扰动仍来自重子和 CDM。我们考虑一个忽略辐射的 ΛCDM 宇宙，其扰动方程为：

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_{\mathbf{k}} = 0 \tag{81}$$

其中：

$$4\pi G\bar{\rho}_m = \frac{3}{2}\Omega_m H_0^2 a^{-3} \tag{82}$$

对于背景由暗能量和物质主导的宇宙，我们有如下背景演化：

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda}H_0 t\right) \tag{83}$$

Friedmann 方程为：

$$H = H_0\sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda} \tag{84}$$

带入背景扰动方程化为（可作为练习）：

$$\delta'' + \left(\frac{H'}{H} + \frac{3}{a}\right)\delta' - \frac{3\Omega_m}{2a^5}\left(\frac{H_0}{H}\right)^2\delta = 0 \tag{85}$$

注意式中的导数是对尺度因子求导。

我们得到其中的增长模式:

$$\delta = A\left(\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda\right)^{1/2} \int_0^a \frac{x^{3/2} dx}{\left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} x^3\right)^{3/2}} \tag{86}$$

上式去暗能量组分很小时的近似为:

$$\delta \approx A \Omega_m^{1/2} a^{-3/2} \int_0^a x^{3/2} dx = \frac{2}{5} \Omega_m^{1/2} A a \tag{87}$$

在现在尺度因子为 1 的情况下有:

$$\frac{2}{5} \Omega_m^{1/2} A \equiv \tilde{\delta} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{5}{2} \Omega_m^{-1/2} \tilde{\delta} \tag{88}$$

以此来确定系数，增长模式的方程化为:

$$\delta = \tilde{\delta} \frac{5}{2} \left(a^{-3} + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}\right)^{1/2} \int_0^a \frac{x^{3/2} dx}{\left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} x^3\right)^{3/2}} \tag{89}$$

2.3.3 增长函数与增长率

我们定义一个增长方程:

$$D(a) \equiv \frac{\delta(a)}{\delta_{\text{ref}}} \tag{90}$$

我们取:

$$\delta_{\text{ref}} = \tilde{\delta} \tag{91}$$

则 ΛCDM 的增长函数为:

$$D(a) = \frac{5}{2} \left(a^{-3} + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}\right)^{1/2} \int_0^a \frac{x^{3/2} dx}{\left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} x^3\right)^{3/2}} \tag{92}$$

定义增长率:

$$f \equiv \frac{d \ln D}{d \ln a} = \frac{d \ln \delta}{d \ln a} = \frac{a}{\delta} \frac{d\delta}{da} \tag{93}$$

我们可以发现在物质主导时增长率为 1。

3 相对论扰动理论

本节介绍大尺度结构形成中对相对论扰动理论的应用。

3.1 超视界尺度的扰动演化

我们在扰动理论一章中讨论过类似的问题，假设状态方程基本不变，对于绝热扰动，共动曲率扰动为:

$$\mathcal{R} = -\frac{5 + 3w}{3 + 3w} \Phi - \frac{2}{3 + 3w} H^{-1} \dot{\Phi} \tag{94}$$

具体地:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}} &= -\frac{2}{3} \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \qquad (\text{辐射主导}, w = \frac{1}{3}) \\ \Phi_{\mathbf{k}} &= -\frac{3}{5} \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \qquad (\text{物质主导}, w = 0) \end{aligned} \tag{95}$$

Bardeen 势:

$$\Phi_{\mathbf{k}}=-\frac{3+3w}{5+3w}\mathcal{R}_{\mathbf{k}} \tag{96}$$

3.2 进入视界

进入视界后，我们可以用牛顿扰动理论，我们给过扰动方程:

$$\delta_{\mathrm{k}}=-\left(\frac{k}{a}\right)^2\frac{\Phi_{\mathrm{k}}}{4\pi G\bar{\rho}}=-\frac{2}{3}\left(\frac{k}{aH}\right)^2\Phi_{\mathrm{k}}=-\frac{2}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\Phi_{\mathrm{k}} \tag{97}$$

结合背景方程:

$$4\pi G\bar{\rho}=\frac{3}{2}H^2 \tag{98}$$

对于大尺度扰动 $k\ll k_{\mathrm{eq}}$，在物质主导后进入视界，得到密度扰动的演化:

$$\begin{aligned}&\Phi_{\mathrm{k}}=-\frac{3}{5}\mathcal{R}_{\mathrm{k}}\quad（物质主导）\\&\delta_{\mathrm{k}}=-\frac{2}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\Phi_{\mathrm{k}}=\frac{2}{5}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\mathcal{R}_{\mathrm{k}}\propto\frac{1}{(aH)^2}\propto t^{2/3}\propto a\end{aligned} \tag{99}$$

k_{eq} 的尺度与视界尺度相等

注意这里的共动曲率扰动取原初常值。

对于在辐射主导时就进入视界的小尺度扰动，在进入视界前，保持我们之前得到的关系:

$$\Phi_{\mathrm{k}}=-\frac{2}{3}\mathcal{R}_{\mathrm{k}} \tag{100}$$

则在进入视界时:

$$\delta_{\mathrm{k}}\approx-\frac{2}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\Phi_{\mathrm{k}}=-\frac{2}{3}\Phi_k\approx\frac{4}{9}\mathcal{R}_{\mathrm{k}} \tag{101}$$

在辐射主导时期利用绝热条件，物质与辐射的扰动有如下关系:

$$\delta_c=\frac{3}{4}\delta_r \tag{102}$$

所以在此时物质的扰动为:

$$\delta_{c\mathbf{k}}\approx\frac{3}{4}\delta_{\mathrm{k}}\approx\frac{1}{3}\mathcal{R}_{\mathrm{k}} \tag{103}$$

这种关系保持至物质占主导时期。

3.3 转移函数

我们尝试在描述小尺度扰动时使用大尺度的结论:

$$\delta_{\mathbf{k}}(t)=\frac{2}{5}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\quad(k\ll k_{\mathrm{eq}}) \tag{104}$$

于是我们定义转移函数:

$$\delta_{\mathbf{k}}(t)=\frac{2}{5}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2T(k,t)\mathcal{R}_{\mathbf{k}} \tag{105}$$

其中 $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$ 仍是原初扰动。

所以根据上节，我们可以得到转移函数的估计:

$$\begin{aligned} T(k) &= 1 && k \ll k_{\text{eq}} \\ T(k) &\sim \left(\frac{k_{\text{eq}}}{k}\right)^2 && k \gg k_{\text{eq}} \end{aligned} \tag{106}$$