广义相对论简明

1 时空度规

对于平面上的两点，为了确定两点间的距离，我们可以由勾股定理给出：

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 \tag{1}$$

更一般形式为：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \tag{2}$$

我们称 $\mathrm{d}s^2$ 为线元。

若换成极坐标系，可以得到：

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\,\mathrm{d}\theta)^2 \tag{3}$$

我们发现，在两种坐标系下，虽然坐标不同，但线元的长度不变，我们称之为标量，其值与坐标的选取无关。

我们将上面两式换种表达：

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1,2} g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \tag{4}$$

$\mathrm{d}x^i$ 为坐标变化的微元，右上角的指标用来标记它是第几个坐标，如 $dx^2 \equiv y$ 。

g_{ij} 被称为度规，一套坐标系就对应一套度规，在笛卡尔系中：

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

极坐标系中：

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

简单来说，度规定义了给定坐标如何得到距离。

在四维时空中，有 1 个时间坐标与 3 个空间坐标，我们将其度规写为：

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{7}$$

上式已经用了爱因斯坦求和约定，重复指标代表求和，我们称这种操作为缩并。

对于平直时空的直角坐标系：

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

对于球坐标系：

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix} \tag{9}$$

宇宙学常用的为 RW 度规（坐标为 $(t, r, \vartheta, \varphi)$ ）写为：

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix} \tag{10}$$

线元写为:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2\right] \tag{11}$$

将其与球坐标度规相比较，可以发现多了 2 个参数：尺度因子 a 和空间曲率 K。

尺度因子 a 是时间的函数，反映宇宙在膨胀，我们规定今天的尺度因子等于 1。

空间曲率 K 是一个常数，曲率为 0 意味着平直空间；曲率为正意味着三维球面空间；曲率为负意味着三维双曲面空间。

2　矢量与张量

矢量 v^μ 我们非常熟悉，就不再多说。

张量 $T^{\mu\nu}$ 可以看做一个二维矩阵，确定两个指标之后就可以确定一个矩阵元，得到一个数。

我们看到矢量和张量的指标都在上面，其实可以通过度规升降指标，如:

$$g^{\alpha\beta}w_\beta = g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}w^\gamma = \delta^\alpha_\gamma w^\gamma = w^\alpha \tag{12}$$
$$A^\beta_\alpha = g_{\alpha\gamma}A^{\gamma\beta} \tag{13}$$
$$A_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}A^{\gamma\delta} \tag{14}$$
$$A^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}A_{\gamma\delta} \tag{15}$$

另外，两个度规缩并得到单位矩阵:

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha \tag{16}$$

3　克氏符与曲率

在确定度规的情况下，我们可以算出克氏符和曲率，公式如下:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}\right) \tag{17}$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu} \tag{18}$$

式子中的 “,” 表示对第几个坐标求导。

克氏符的目的主要是用来算曲率，而曲率表示了时空的弯曲程度，即时空形状，这些现在都可以用 Mathematica 程序计算。

4　场方程

爱因斯坦张量用来表示时空的几何形状:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{19}$$

他得出了广义相对论的引力场方程:

$$G^\mu_\nu = 8\pi G T^\mu_\nu \tag{20}$$

其中 T^μ_ν 为能动张量，表示物质的分布。

于是场方程的意义就是：时空形状可以决定物质分布，物质分布可以决定时空形状。

我们使用相对论就是在解决如何通过物质得到时空几何，和如何从时空几何反推物质分布的问题。

求广义相对论的一般步骤为：

1. 确定一个度规和物质分布
2. 算出克氏符，算出曲率
3. 带入场方程，列出各个分量的方程组
4. 求解微分方程组