FLRW 宇宙

1 几何

本节主要介绍宇宙学中基本的几何。

1.1 RW 度规

我们在宇宙学中常用自然单位制:

$$c = \hbar = k_B = 1 \tag{1}$$

在自然单位制下，宇宙学中最常用的度规为 RW 度规:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2\right] \tag{2}$$

其中 $a(t)$ 为尺度因子，他可以表达出宇宙在演化过程中的膨胀。它规定了宇宙中的物理长度，我们可以将其理解成宇宙中的距离单位。中括号里的内容交代了坐标距离，但距离只是“数”，缺少单位，所以我们需要再乘一个尺度因子，这样这个距离就有了 $a(t)$ 这个单位。

换句话说，所谓度规，是从坐标上的数转化为物理上的量的过程。我们规定现在的尺度因子值为 $a_0 = 1$，宇宙诞生之初取 0，所以我们现在的坐标距离就等于物理距离，但如果放在过去，对于相同的坐标距离，物理距离就更短。

我们称坐标 $(t, r, \vartheta, \varphi)$ 为共动坐标，上面所说的坐标距离可以说成共动距离。

K 代表宇宙的空间曲率，因此宇宙的曲率半径可以写为:

$$R_{\text{curv}} \equiv a(t)/\sqrt{|K|} \tag{3}$$

在常识中，只有球面才有曲率半径，这里我们可以将宇宙看做一个三维球面来理解曲率半径。曲率为正时宇宙是三维球面，为负时宇宙是三维双曲面。

对于 K，它可以取任何值，但我们总可以伸缩 r 使其值归一化，即:

$$k = -1, 0, +1 \tag{4}$$

此时宇宙的曲率半径就等于尺度因子 a。

我们还可以换一种坐标选取方式，在正曲率情况下做如下变量替换:

$$r = K^{-1/2}\sin\left(K^{1/2}\chi\right) \tag{5}$$

那么 RW 度规可以改写为:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + K^{-1}\sin^2\left(K^{1/2}\chi\right)d\vartheta^2 + K^{-1}\sin^2\left(K^{1/2}\chi\right)\sin^2\vartheta d\varphi^2\right] \tag{6}$$

若将 K 归一化，则有更简洁的形式:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi d\vartheta^2 + \sin^2\chi \sin^2\vartheta d\varphi^2\right] \tag{7}$$

这种坐标更可以用三维球面看待，尺度因子是球半径，宇宙上的点只需要用三个角度坐标确定，相当于高一维的球面坐标系。

其更普通的形式写为:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + f_K^2(\chi)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right] \tag{8}$$

$$f_K(\chi) \equiv \begin{cases} K^{-1/2}\sin\left(K^{1/2}\chi\right) & (K>0) \\ \chi & (K=0) \\ |K|^{-1/2}\sinh\left(|K|^{1/2}\chi\right) & (K<0) \end{cases} \tag{9}$$

我们定义一个有用的量:

$$H \equiv \dot{a}/a \tag{10}$$

这就是哈勃参量，现在哈勃参量的值取为 H_0。

我们以此定义哈勃尺度:

$$t_H \equiv l_H \equiv H^{-1} \tag{11}$$

1.2 红移

由相对论，光在四维时空中走的距离是 0，即:

$$ds^2 = 0 \tag{12}$$

我们考虑光延 r 方向传播，没有角度的偏转，所以有:

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{-dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{13}$$

积分上式，从光源处出发 $(t=t_1, r=r_A)$，积分到观测者处 $(t=t_2, r=0)$，注意符号，得到下式:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_A}\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{14}$$

上式可以认为是光波的“头部”的积分关系，对于光波的“尾部”，我们认为它只是比前面的“头部”晚一点出发和到达:

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2}\frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_A}\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{15}$$

上两式相减:

$$0 = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2}\frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2}\frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1}\frac{dt}{a(t)} = \frac{\delta t_2}{a\left(t_2\right)} - \frac{\delta t_1}{a\left(t_1\right)} \tag{16}$$

所以有如下关系:

$$\delta t_2 = \frac{a\left(t_2\right)}{a\left(t_1\right)}\delta t_1 \tag{17}$$

上式表明了在发出和到达时光子振动的周期正比于尺度因子。

我们通过这个关系定义红移:

$$1+z \equiv \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} = \frac{a\left(t_2\right)}{a\left(t_1\right)} \tag{18}$$

如果是现在接收到光，那么红移和尺度因子关系如下:

$$1+z = \frac{a_0}{a} \tag{19}$$

可以发现，现在（近似）发出的光红移为 0，而宇宙诞生之初发出的光红移为无穷大。

还有一个有用的微分关系（可作为练习）:

$$\frac{da}{a} = -\frac{dz}{1+z} \tag{20}$$

1.3 距离

1.3.1 共动距离

共动距离就是坐标的积分：

$$\chi=\int_0^{r_A}\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{21}$$

1.3.2 物理距离

之前说过，物理距离是尺度因子乘以共动距离，所以定义物理距离：

$$d^p(t)=a(t)\int_0^{r_A}\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}=a(t)\int_0^{\chi_A}d\chi \tag{22}$$

我们可以得到物理距离与共动距离的关系：

$$d^p(t)=a(t)\chi=\frac{a_0}{1+z}\chi\equiv\frac{d^c}{1+z} \tag{23}$$

上式 d^c 就是共动距离。

我们将我们所能看到最远的距离叫做视界，我们能看到的最远地方是宇宙诞生之初时发出的光，我们定义视界：

$$d^c_{\mathrm{hor}}=\chi_{\mathrm{hor}}=\int_0^{\infty}\frac{dz'}{H\left(z'\right)} \tag{24}$$

这意味着我们能看到的区域是有限的，因为在视界之外天体发出的光传到我们这里要花的时间比宇宙年龄还要大。

1.3.3 角直径距离

一个天体直径两端分别发出两束光，我们收到它时可以得到它的角直径距离，定义为：

$$d_A\equiv\frac{s^p}{\vartheta} \tag{25}$$

s^p 是天体光发射时的直径，ϑ 是观测到的角度。

我们在共动坐标下看，有很清晰的几何关系，就是：

$$d^c_A\equiv s^c/\vartheta \tag{26}$$

而物理直径与共动直径的关系我们是知道的：

$$s^c=(1+z)s^p \tag{27}$$

所以我们就得到了角直径距离的红移计算式：

$$d_A(z)=a(t)r=\frac{r}{1+z}=\frac{f_K(\chi)}{1+z}=\frac{1}{1+z}f_K\left(\int_0^z\frac{dz'}{H\left(z'\right)}\right) \tag{28}$$

1.3.4 光度距离

我们测光时可以测得其视光度 l，通过某些手段我们也可以得到它的绝对光度 L（功率），两个光度有如下关系：

$$l=L/4\pi d^2 \tag{29}$$

所以我们定义一个光度距离：

$$d_L\equiv\sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \tag{30}$$

影响光度测量的有三方面，一是光子数，二是光子能量，三是接收一段波长需要的时间。相比于不膨胀的宇宙，膨胀宇宙辐射的面积与之前相比要 $\times(\frac{a_0}{a})^2$，导致单位面积上接收到的光子数以 $(\frac{a}{a_0})^2$ 比例减少。而光子的能量相比之前以 $\frac{a}{a_0}$ 比例减小，但接收时间由于光子的拉伸以 $\frac{a_0}{a}$ 比例变长。所以我们可以将上面的分析总结：

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} = (1+z)r = (1+z)d_A^c(z) = (1+z)^2 d_A(z) \tag{31}$$

2 动力学

本节主要介绍 Friedmann 方程导出的宇宙动力学。求解广义相对论的过程参阅上一章。

2.1 Friedmann 方程

通过求解广义相对论可以得出下面两个方程：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{32}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \tag{33}$$

上面关系到的新物理量有密度 ρ，压强 p，宇宙学常数（暗能量） Λ。

上面两个就是 Friedmann 方程。

用哈勃参数替换上式的增长率可得：

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{34}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 \tag{35}$$

广义相对论理论还给出能量守恒方程：

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} \tag{36}$$

宇宙中存在各种成分，包括物质和辐射等。

在热力学中我们学过密度和压强可以用一个状态方程联系起来，在宇宙学中，我们也定义一个状态方程：

$$w \equiv \frac{p}{\rho} \tag{37}$$

对于普通物质 $w=0$；对辐射（看做光速运动的物质）$w=\frac{1}{3}$，对宇宙学常数 $w=-1$。

加入状态方程，能量守恒方程可以写成微分形式：

$$d\ln\rho = -3(1+w)d\ln a \tag{38}$$

所以：

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \tag{39}$$

对物质 $\rho_m \propto a^{-3}$，对辐射 $\rho_r \propto a^{-4}$，对宇宙学常数 $\rho_\Lambda \propto a^{-4}$。

2.2 密度参量

如果我们考虑一个平坦的，无暗能量的宇宙，那么 Friedmann 方程可以简化为：

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{40}$$

称这时的密度 ρ_c 为临界密度，今天的值为：

$$\rho_{\mathrm{c}_0} = \rho_{\mathrm{c}}\left(t_0\right) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{41}$$

我们可以通过临界密度来表示宇宙的真实密度，我们定义一个密度参量:

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{\mathrm{c}}} \tag{42}$$

注意上式的定义仅限于物质和辐射。

通过如上定义，我们可以将 Friedmann 方程改写成密度参量的形式:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3}\Omega_r\rho_{\mathrm{cr}0}}_{\Omega_r H_0^2}a^{-4} + \underbrace{\frac{8\pi G}{3}\Omega_m\rho_{\mathrm{cr}0}}_{\Omega_m H_0^2}a^{-3} + \Omega_\Lambda H_0^2 \underbrace{-K}_{+\Omega_k H_0^2} a^{-2} \tag{43}$$

$$= H_0^2\left(\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda\right) \tag{44}$$

$$H(z) = H_0 E(z) \tag{45}$$

$$E(z) \equiv \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \tag{46}$$

这就是密度参量形式的 Friedmann 方程。