宇宙学扰动理论

1 背景时空

本节介绍了在宇宙学扰动理论中常用的记号与背景。

1.1 记号与背景

为了方便起见，我们在宇宙几何背景上使用一套共形坐标 $(\eta, \vec{x})$，其度规写为：

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j] = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

同时我们规定一些记号：

$$\begin{aligned} {}' &\equiv \frac{d}{d\eta} = a\frac{d}{dt} \\ \mathcal{H} &\equiv \frac{a'}{a} = aH = \dot{a} \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 为常见的闵可夫斯基度规：

$$[\eta_{\mu\nu}] \equiv diag(-1,1,1,1) \tag{3}$$

定义共形时间 η：

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \tag{4}$$

在这样的约定下，我们有如下可能会用到的关系：

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 \\ &\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}(\bar{\rho}+3\bar{p})a^2 \\ &w = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{2\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right) = -1-\frac{2\dot{H}}{3H^2} \Rightarrow 1+w = \frac{2}{3}\left(1-\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right) = -\frac{2\dot{H}}{3H^2} \\ &c_s^2 - w = \frac{1}{3\mathcal{H}^2}\left[\frac{\mathcal{H}\mathcal{H}''-2(\mathcal{H}')^2}{\mathcal{H}^2-\mathcal{H}'}\right] = -\frac{1}{3H\dot{H}}\left(\ddot{H}-\frac{2\dot{H}^2}{H}\right) \\ &c_s^2 = \frac{1}{3\mathcal{H}}\left(\frac{\mathcal{H}''-\mathcal{H}\mathcal{H}'-\mathcal{H}^3}{\mathcal{H}^2-\mathcal{H}'}\right) = -1-\frac{\dot{H}}{3H\dot{H}} \\ &1+c_s^2 = \frac{\mathcal{H}''-4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^3}{3\mathcal{H}\left(\mathcal{H}^2-\mathcal{H}'\right)} = -\frac{\ddot{H}}{3H\dot{H}} \end{aligned} \tag{5}$$

其中状态方程和声速定义如下：

$$\begin{aligned} w &\equiv \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \\ c_s^2 &\equiv \frac{\dot{\bar{p}}}{\dot{\bar{\rho}}} \equiv \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} \end{aligned} \tag{6}$$

2 时空扰动

本节介绍了场方程的左边如何化为扰动形式。

2.1 度规扰动

在扰动的时空中，度规可以写成如下形式：

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \tag{7}$$

我们在这里只考虑度规的一阶扰动，所以所有的二阶以上小量都会被忽略，我们定义扰动量的指标升降运算：

$$h^{\mu}_{\nu} \equiv \eta^{\mu\rho} h_{\rho\nu}, \quad h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma} \tag{8}$$

现在我们将扰动项定义细化：

$$[h_{\mu\nu}] \equiv \begin{bmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中：

$$D \equiv -\frac{1}{6} h^i_i \equiv -\frac{1}{6} h \tag{10}$$

$$\delta^{ij} E_{ij} \equiv E^i_i \equiv E_{ii} = 0 \tag{11}$$

即 E_{ij} 为对称无迹张量。

于是线元可展开为：

$$ds^2 = a^2(\eta)\left\{-(1+2A)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + [(1-2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}]dx^i dx^j\right\} \tag{12}$$

2.2 规范变换

对于给定的背景坐标系，在扰动时空中我们有多种坐标系的选择，规范的选择会直接影响我们计算的难易程度，这时候就需要规范变换来实现坐标系间的联系。

设背景的坐标为 x^α，扰动时空中的坐标为 $\hat{x}^\alpha$ 和 $\tilde{x}^\alpha$，三者在坐标变换中关联：

$$\tilde{x}^\alpha = \hat{x}^\alpha + \xi^\alpha \tag{13}$$

其中规范变换矢量 ξ^α 是个小量。

经过复杂的张量运算（推导过程较繁琐，可以参考相关英文文献），我们可以得到度规扰动的规范变换：

$$\tilde{A} = A - \xi^0_{,0} - \frac{a'}{a}\xi^0 \tag{14}$$

$$\tilde{B}_i = B_i + \xi^i_{,0} - \xi^0_{,i} \tag{15}$$

$$\tilde{D} = D + \frac{1}{3}\xi^k_{,k} + \frac{a'}{a}\xi^0 \tag{16}$$

$$\tilde{E}_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{2}\left(\xi^i_{,j} + \xi^j_{,i}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k_{,k} \tag{17}$$

2.3 度规扰动的标量、矢量、张量分解

方便起见，我们将 B_i 和 E_{ij} 分解。

将 B_i 分解为零旋度与零散度部分：

$$\vec{B} = \vec{B}^S + \vec{B}^V \qquad \nabla \times \vec{B}^S = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B}^V = 0 \tag{18}$$

并且定义标量 B:

$$\vec{B}^S = -\nabla B \tag{19}$$

将 E_{ij} 分为三部分：

$$E_{ij} = E^S_{ij} + E^V_{ij} + E^T_{ij} \tag{20}$$

仿照上面的定义，E_{ij}^S, E_{ij}^V 可以用 E, E_i 表示：

$$E_{ij}^S = \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)E = E_{,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta^{kl}E_{,kl} \tag{21}$$

$$E_{ij}^V = -\frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) \qquad \delta^{ij}E_{i,j} = \nabla\cdot\vec{E} = 0 \tag{22}$$

$$\delta^{ik}E_{ij,k}^T = 0 \quad \delta^{ij}E_{ij}^T = 0 \tag{23}$$

我们只需注意：E_{ij}^S, E_{ij}^V 是对称无迹张量（验证可作为练习），E_{ij}^T 是对称的横向无迹张量，其意义将会在后文涉及。

所以在度规扰动中，我们可以将扰动分为三个部分：

1. 标量扰动：A, B, D, E

2. 矢量扰动：B_i^V, E_i

3. 张量扰动：E_{ij}^T

共 $4+4+2=10$ 个自由度。

2.4 傅里叶空间的扰动

位置空间的扰动可以由不同模式线性组合而成，在平直的背景下的小扰动的各个模式则可以看作是独立演化的，于是我们只需研究任意模式下的单个扰动即可。我们写出傅里叶展开的公式：

$$f(\eta, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(\eta)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{24}$$

对于扰动，我们发现我们只需展开 B, E_i, E 即可导出一整套扰动模式，我们对之作傅里叶展开：

$$\begin{aligned} B(\eta,\vec{x}) &= \sum_{\vec{k}} \frac{B_{\vec{k}}(\eta)}{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \vec{E}(\eta,\vec{x}) &= \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{E}_{\vec{k}}(\eta)}{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ E(\eta,\vec{x}) &= \sum_{\vec{k}} \frac{E_{\vec{k}}(\eta)}{k^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $k \equiv |\vec{k}|$ 使得他们在 k 空间有相同的量纲（前后使用同样的“傅里叶约定”即可，不用担心出错），在此列出我们所使用的傅里叶约定：

x空间	B	E	ξ	v	Π	μ
k空间	$\frac{B}{k}$	$\frac{E}{k^2}$	$\frac{\xi}{k}$	$\frac{v}{k}$	$\frac{\Pi}{k^2}$	$\frac{\mu}{k^2}$

(26)

于是上节的标量、矢量、张量分解可以修改为如下（可作为练习）：

$$\begin{aligned} B_i^S = -B_{,i} &\quad\Longrightarrow\quad B_i^S = -i\frac{k_i}{k}B \\ E_{ij}^S = \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)E &\quad\Longrightarrow\quad E_{ij}^S = \left(-\frac{k_ik_j}{k^2} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)E \\ E_{ij}^V = -\frac{1}{2}(E_{i,j}+E_{j,i}) &\quad\Longrightarrow\quad E_{ij}^V = -\frac{i}{2k}(k_iE_j + k_jE_i) \end{aligned} \tag{27}$$

并且：

$$\delta^{ij}k_jB_i^V = \vec{k}\cdot\vec{B}^V = 0 \quad \delta^{ij}k_jE_i = \vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \quad \delta^{ik}k_kE_{ij}^T = \delta^{ij}E_{ij}^T = 0 \tag{28}$$

为了简化上面的式子，我们选取一个特殊的坐标架，使得：

$$\vec{k} = k\hat{z} = (0,0,k) \tag{29}$$

经过计算，我们可以得到度规扰动 $\delta g_{\mu\nu}$ 的 SVT（标量、矢量、张量）部分（可作为练习）：

$$\delta g^{S}_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -2A & & & +iB \\ & 2\left(-D+\frac{1}{3}E\right) & & \\ +iB & & 2\left(-D+\frac{1}{3}E\right) & \\ & & & 2\left(-D-\frac{2}{3}E\right) \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\delta g^{V}_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} & -B_1 & -B_2 & \\ -B_1 & & & -iE_1 \\ -B_2 & & & -iE_2 \\ & -iE_1 & -iE_2 & \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$\delta g^{T}_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} & & & \\ & 2E^T_{11} & 2E^T_{12} & \\ & 2E^T_{12} & -2E^T_{11} & \\ & & & \end{bmatrix} = a^2 \begin{bmatrix} & & & \\ & h_+ & h_\times & \\ & h_\times & -h_+ & \\ & & & \end{bmatrix}, \tag{32}$$

度规扰动的张量部分是引力波的来源，上式只存在两个空间分量，而我们有规定 z 轴为波矢方向，不难发现引力波是横波，而上式也显示了引力波的两个偏振模式，$+$ 号偏振与 $\times$ 号偏振。

将以上分量全部组合，得到：

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -2A & -B_1 & -B_2 & +iB \\ -B_1 & 2\left(-D+\frac{1}{3}E\right)+h_+ & h_\times & -iE_1 \\ -B_2 & h_\times & 2\left(-D+\frac{1}{3}E\right)-h_+ & -iE_2 \\ +iB & -iE_1 & -iE_2 & 2\left(-D-\frac{2}{3}E\right) \end{bmatrix} \tag{33}$$

2.5 傅里叶空间的规范变换

规范变换矢量的傅里叶展开可写为：

$$\xi^\mu(\eta,\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \xi^\mu_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{34}$$

于是规范变换可写为：

$$\tilde{A} = A - \left(\xi^0\right)' - \frac{a'}{a}\xi^0 \tag{35}$$

$$\tilde{B}_i = B_i + \left(\xi^i\right)' - ik_i\xi^0 \tag{36}$$

$$\tilde{D} = D + \frac{1}{3}ik_i\xi^i + \frac{a'}{a}\xi^0 \tag{37}$$

$$\tilde{E}_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{2}i\left(k_i\xi^j + k_j\xi^i\right) + \frac{1}{3}i\delta_{ij}k_k\xi^k \tag{38}$$

相当于我们只需在原矩阵下加上一个规范变换矩阵：

$$a^2 \begin{bmatrix} 2\left(\xi^0\right)' + 2\frac{a'}{a}\xi^0 & -\left(\xi^1\right)' & -\left(\xi^2\right)' & -\left(\xi^3\right)' + ik\xi^0 \\ -\left(\xi^1\right)' & -2\frac{a'}{a}\xi^0 & & -ik\xi^1 \\ -\left(\xi^2\right)' & & -2\frac{a'}{a}\xi^0 & -ik\xi^2 \\ -\left(\xi^3\right)' + ik\xi^0 & -ik\xi^1 & -ik\xi^2 & -2\frac{a'}{a}\xi^0 - 2ik\xi^3 \end{bmatrix} \tag{39}$$

2.6 标量扰动

现在我们只考虑标量扰动，度规可以写为：

$$ds^2 = a(\eta)^2\left\{-(1+2A)d\eta^2 + 2B_{,i}d\eta dx^i + [(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j\right\} \tag{40}$$

其中曲率扰动定义为：

$$\psi \equiv D + \frac{1}{3}\nabla^2 E \tag{41}$$

$$\psi_{\vec{k}} = D_{\vec{k}} - \frac{1}{3}E_{\vec{k}} \tag{42}$$

此时相对背景的扰动部分为:

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2A & B_{,i} \\ B_{,i} & -2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{bmatrix} \tag{43}$$

接下来我们考虑规范变换，我们希望规范变换矢量$\xi^\mu = \left(\xi^0, \xi^i\right)$也可以写成标量形式，于是我们尝试将 ξ^i 分解成零散与零旋部分:

$$\xi^i = \xi^i_{\text{tr}} - \delta^{ij}\xi_{,j} = \vec{\xi}_{\text{tr}} - \nabla\xi \qquad \xi^i_{\text{tr},i} = \nabla\cdot\vec{\xi}_{\text{tr}} = 0 \tag{44}$$

$\vec{\xi}_{\text{tr}}$ 称作横向部分，这在规范变换里将会消失（可作为练习），只剩下ξ^0, ξ。

于是我们可以得出（可作为练习）:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - \xi^{0\prime} - \frac{a'}{a}\xi^0 \\ \tilde{B} &= B + \xi' + \xi^0 \\ \tilde{D} &= D - \frac{1}{3}\nabla^2\xi + \frac{a'}{a}\xi^0 \\ \tilde{E} &= E + \xi \\ \tilde{\psi} &= \psi + \frac{a'}{a}\xi^0 = \psi + \mathcal{H}\xi^0 \end{aligned} \tag{45}$$

在傅里叶空间中有:

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= B + \xi' + k\xi^0 \\ \tilde{D} &= D + \frac{1}{3}k\xi + \mathcal{H}\xi^0 \\ \tilde{E} &= E + k\xi \end{aligned} \tag{46}$$

我们还可以构造两个度规扰动的规范不变量，称为 Bardeen 势（验证可作为练习）:

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv A + \mathcal{H}\left(B - E'\right) + \left(B - E'\right)' \\ \Psi &\equiv D + \frac{1}{3}\nabla^2 E - \mathcal{H}\left(B - E'\right) = \psi - \mathcal{H}\left(B - E'\right) \end{aligned} \tag{47}$$

2.7 共形牛顿规范

规范的选择可以消掉一部分自由度，共形牛顿规范可以消掉扰动里所有的非对角元，如下:

$$\begin{aligned} \xi &= -E \\ \xi^0 &= -B + E' \end{aligned} \tag{48}$$

则有:

$$\begin{aligned} A^N &= \Phi \\ D^N &= \psi^N = \Psi \end{aligned} \tag{49}$$

现在的度规形式非常简单:

$$ds^2 = a(\eta)^2\left[-(1+2\Phi)d\eta^2 + (1-2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j\right] \tag{50}$$

$$g_{\mu\nu} = a^2\begin{bmatrix} -1-2\Phi & \\ & (1-2\Psi)\delta_{ij} \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2\Phi & \\ & -2\Psi\delta_{ij} \end{bmatrix} \tag{52}$$

有了度规就可以算联络，算完联络算曲率，算完曲率就可以算出爱因斯坦张量（可作为练习，用Mathematica计算），这里给出部分计算结果：

$$\begin{aligned}
R_0^0 =& 3a^{-2}\mathcal{H}' + a^{-2}\left[-3\Psi'' - \nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}\left(\Phi' + \Psi'\right) - 6\mathcal{H}'\Phi\right] \\
R_i^0 =& -2a^{-2}\left(\Psi' + \mathcal{H}\Phi\right)_{,i} \\
R_0^i =& -R_i^0 = 2a^{-2}\left(\Psi' + \mathcal{H}\Phi\right)_{,i} \\
R_j^i =& a^{-2}\left(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2\right)\delta_j^i + a^{-2}\left[-\Psi'' + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}\left(\Phi' + 5\Psi'\right) - \left(2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2\right)\Phi\right]\delta_{ij} + a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij}
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
R =& R_0^0 + R_i^i \\
=& 6a^{-2}\left(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right) + a^{-2}\left[-6\Psi'' + 2\nabla^2(2\Psi - \Phi) - 6\mathcal{H}\left(\Phi' + 3\Psi'\right) - 12\left(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right)\Phi\right]
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
G_0^0 =& R_0^0 - \frac{1}{2}R = -3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}\left[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi\right] \\
G_i^0 =& R_i^0 \\
G_0^i =& R_0^i = -R_i^0 = -G_i^0 \\
G_j^i =& R_j^i - \frac{1}{2}\delta_j^i R \\
=& a^{-2}\left(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2\right)\delta_j^i + a^{-2}\left[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}\left(2\Phi' + 4\Psi'\right) + \left(4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2\right)\Phi\right]\delta_j^i + a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij}
\end{aligned} \tag{55}$$

3　物质扰动

本节介绍了场方程的右边如何化为扰动形式。

3.1　能动张量扰动

在背景中，广义相对论中理想流体的能动张量：

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{\mu\nu} &= (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu + \bar{p}\bar{g}^{\mu\nu} \\
\bar{T}_\nu^\mu &= (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}^\mu\bar{u}_\nu + \bar{p}\delta_\nu^\mu
\end{aligned} \tag{56}$$

在均匀各向同性的宇宙中流体静止，故四速只有0分量，又因为：

$$\bar{u}_\mu\bar{u}^\mu = \bar{g}_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu = a^2\eta_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu = -a^2\left(\bar{u}^0\right)^2 = -1 \tag{57}$$

则有：

$$\bar{u}^\mu = \frac{1}{a}(1, \overrightarrow{0}) \qquad \bar{u}_\mu = a(-1, \overrightarrow{0}) \tag{58}$$

我们认为带扰动的能动张量可以写成如下形式：

$$T_\nu^\mu = \bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu \tag{59}$$

我们可以写出密度扰动、压强扰动及速度扰动：

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho \qquad p = \bar{p} + \delta p \qquad u^i = \bar{u}^i + \delta u^i = \delta u^i \equiv \frac{1}{a}v_i \tag{60}$$

其中速度扰动的定义为：

$$v_i \equiv a u^i \tag{61}$$

这是在共动坐标系下观察的速度。

同时我们定义一个相对密度扰动：

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \tag{62}$$

现在我们可以用 v_i 来表达 u^μ：

$$\begin{aligned}
u^\mu &= \bar{u}^\mu + \delta u^\mu \equiv \left(a^{-1} + \delta u^0, a^{-1}v_1, a^{-1}v_2, a^{-1}v_3\right) \\
u_\nu &= \bar{u}_\nu + \delta u_\nu \equiv \left(-a + \delta u_0, \delta u_1, \delta u_2, \delta u_3\right)
\end{aligned} \tag{63}$$

用上扰动的度规:

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -1-2A & -B_i \\ -B_i & (1-2D)\delta_{ij}+2E_{ij} \end{bmatrix} \tag{64}$$

我们可以具体算出（可作为练习）：

$$\begin{aligned} \delta u_0 &= -a^2\delta u^0 - 2aA \\ \delta u_i &= u_i = g_{i\mu}u^\mu = -aB_i + av_i \end{aligned} \tag{65}$$

通过 $u_\mu u^\mu = -1$ 可以解出:

$$\delta u^0 = -\frac{1}{a}A \tag{66}$$

现在的四速可以表示为:

$$u^\mu = \frac{1}{a}(1-A, v_i) \qquad u_\mu = a\left(-1-A, v_i - B_i\right) \tag{67}$$

于是能动张量可以改写成:

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &= \bar{T}^\mu_\nu + \delta T^\mu_\nu \\ &= \begin{bmatrix} -\bar\rho & 0 \\ 0 & \bar{p}\delta^i_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta\rho & (\bar\rho+\bar p)\left(v_i - B_i\right) \\ -(\bar\rho+\bar p)v_i & \delta p \delta^i_j \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{68}$$

现在我们把空间部分的扰动拆分成对角元部分和无迹部分（实际上是分成理想流体部分和偏离理想流体部分）：

$$\delta T^i_j = \delta p \delta^i_j + \Sigma_{ij} \equiv \bar p\left(\frac{\delta p}{\bar p} + \Pi_{ij}\right) \tag{69}$$

对照前面的式子，可以得出如下关系:

$$\begin{aligned} \delta p &\equiv \delta\frac{1}{3}T^k_k \\ \Sigma_{ij} &\equiv \delta T^i_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\delta T^k_k \end{aligned} \tag{70}$$

其中 Σ_{ij} 被称为各向异性应力，是一个无迹对称张量，Π_{ij} 是它的无量纲形式，在理想流体中为 0。

至此，我们发现能动张量扰动可以由以下量组成:

$\delta\rho, \delta p, \vec{v} = v_i, \Pi_{ij}$

3.2 能动张量扰动的标量、矢量、张量分解

仿照我们熟悉的“SVT 分解”，我们可以将 $\vec{v}$ 分解为零旋与零散部分:

$$\begin{aligned} v_i &= v_i^S + v_i^V \\ v_i^S &= -v_{,i} \\ \nabla\cdot\vec{v}^V &= 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Π_{ij} 分解为:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \Pi^S_{ij} + \Pi^V_{ij} + \Pi^T_{ij}, \\ \Pi^S_{ij} &= \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\Pi \\ \Pi^V_{ij} &= -\frac{1}{2}(\Pi_{i,j} + \Pi_{j,i}) \\ \delta^{ik}\Pi^T_{ij,k} &= 0 \end{aligned} \tag{72}$$

在傅里叶空间有（可作为练习）：

$$
\begin{aligned}
v_i^S &= -i\frac{k_i}{k}v \\
\Pi_{ij}^S &= \left(-\frac{k_ik_j}{k^2}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\Pi
\end{aligned} \tag{73}
$$

3.3 能动张量的规范变换

利用规范变换的规则（具体推导参阅其他英文文献）我们可以得出各个量的规范变换：

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\delta\rho} = \delta\rho - \bar{\rho}'\xi^0 \\
&\widetilde{\delta p} = \delta p - \bar{p}'\xi^0 \\
&\tilde{v}_i = v_i + \xi^i_{,0} \\
&\tilde{\Pi}_{ij} = \Pi_{ij} \\
&\tilde{\delta} = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}\xi^0 = \delta + 3\mathcal{H}(1+w)\xi^0
\end{aligned} \tag{74}
$$

对标量扰动有：

$$
\begin{aligned}
&\tilde{v} = v + \xi' \\
&\tilde{\Pi} = \Pi
\end{aligned} \tag{75}
$$

选取共形牛顿规范，得出：

$$
\begin{aligned}
\delta\rho^N &= \delta\rho + \bar{\rho}'\left(B-E'\right) = \delta\rho - 3\mathcal{H}(1+w)\bar{\rho}\left(B-E'\right) \\
\delta p^N &= \delta p + \bar{p}'\left(B-E'\right) = \delta p - 3\mathcal{H}(1+w)c_s^2\bar{\rho}\left(B-E'\right) \\
v^N &= v - E' \\
\Pi^N &= \Pi
\end{aligned} \tag{76}
$$

在共形牛顿规范下，只考虑扰动的标量部分，能动张量扰动写为：

$$
\delta T^\mu_\nu = \begin{bmatrix} -\delta\rho^N & -(\bar{\rho}+\bar{p})v^N_{,i} \\ (\bar{\rho}+\bar{p})v^N_{,i} & \delta p^N\delta^i_j + \bar{p}\left(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\Pi\right) \end{bmatrix} \tag{77}
$$

4 标量扰动演化方程

本节推导了标量扰动演化方程并且给出计算实例。

4.1 标量扰动的场方程

我们分别讨论完了爱因斯坦场方程的两边：几何部分与物质部分。现在我们需要将计算好的内容带入场方程：

$$
\delta G^\mu_\nu = 8\pi G\delta T^\mu_\nu \tag{78}
$$

我们在共形牛顿规范下讨论标量扰动，求解出如下内容（可作为练习）：

$$
3\mathcal{H}\left(\Psi' + \mathcal{H}\Phi\right) - \nabla^2\Psi = -4\pi Ga^2\delta\rho^N \tag{79}
$$

$$
\left(\Psi' + \mathcal{H}\Phi\right)_{,i} = 4\pi Ga^2(\bar{\rho}+\bar{p})v^N_{,i} \tag{80}
$$

$$
\Psi'' + \mathcal{H}\left(\Phi' + 2\Psi'\right) + \left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right)\Phi + \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi-\Psi) = 4\pi Ga^2\delta p^N \tag{81}
$$

$$
\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\right)(\Psi-\Phi) = 8\pi Ga^2\bar{p}\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\right)\Pi \tag{82}
$$

上述爱因斯坦场方程组可以改写为两个限制方程和两个演化方程（可作为练习，提示：运用傅里叶空间和位置空间的切换）：

限制方程：

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\Psi &= \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\left[\delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N\right] \\
\Psi - \Phi &= 3\mathcal{H}^2 w\Pi
\end{aligned} \tag{83}
$$

演化方程:

$$
\begin{aligned}
&\Psi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+w)v^N \\
&\Psi'' + \mathcal{H}\left(\Phi' + 2\Psi'\right) + \left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right)\Phi + \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta p^N/\bar{\rho}
\end{aligned} \tag{84}
$$

在傅里叶空间的形式为:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\Psi = -\frac{3}{2}\left[\delta^N + 3(1+w)\frac{\mathcal{H}}{k}v^N\right] \\
&\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2(\Psi - \Phi) = 3w\Pi \\
&\mathcal{H}^{-1}\Psi' + \Phi = \frac{3}{2}(1+w)\frac{\mathcal{H}}{k}v^N \\
&\mathcal{H}^{-2}\Psi'' + \mathcal{H}^{-1}\left(\Phi' + 2\Psi'\right) + \left(1 + \frac{2\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right)\Phi - \frac{1}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2(\Phi - \Psi) = \frac{3}{2}\frac{\delta p^N}{\bar{\rho}}
\end{aligned} \tag{85}
$$

4.2 能动张量守恒方程

广义相对论中能动张量守恒方程在这里也是可以计算的，方程为:

$$
T^{\mu}_{\nu;\mu} = T^{\mu}_{\nu,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}T^{\alpha}_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}T^{\mu}_{\alpha} = 0 \tag{86}
$$

计算结果在此列出:

$$
\begin{aligned}
&\left(\delta^N\right)' = (1+w)\left(\nabla^2 v^N + 3\Psi'\right) + 3\mathcal{H}\left(w\delta^N - \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}}\right) \\
&\left(v^N\right)' = -\mathcal{H}(1-3w)v^N - \frac{w'}{1+w}v^N + \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}+\bar{p}} + \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi + \Phi
\end{aligned} \tag{87}
$$

若是理想流体:

$$
\left(\delta^N\right)' = (1+w)\left(\nabla^2 v^N + 3\Phi'\right) + 3\mathcal{H}\left(w\delta^N - \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}}\right) \tag{88}
$$

$$
\left(v^N\right)' = -\mathcal{H}(1-3w)v^N - \frac{w'}{1+w}v^N + \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}+\bar{p}} + \Phi \tag{89}
$$

在傅里叶空间的结果:

$$
\begin{aligned}
&\left(\delta^N\right)' = -(1+w)\left(kv^N - 3\Psi'\right) + 3\mathcal{H}\left(w\delta^N - \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}}\right) \\
&\left(v^N\right)' = -\mathcal{H}(1-3w)v^N - \frac{w'}{1+w}v^N + k\frac{\delta p^N}{\bar{\rho}+\bar{p}} - \frac{2}{3}k\frac{w}{1+w}\Pi + k\Phi
\end{aligned} \tag{90}
$$

4.3 理想流体的标量扰动

运用场方程，在共形牛顿规范下，理想流体情况下标量扰动仅有一个自由度，因为:

$$
\Psi = \Phi \tag{91}
$$

带回到场方程中，可以得到:

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\Phi = 4\pi Ga^2\bar{\rho}\left[\delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N\right] = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\left[\delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N\right] \\
&\Phi' + \mathcal{H}\Phi = 4\pi Ga^2(\bar{\rho}+\bar{p})v^N = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+w)v^N \\
&\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + \left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right)\Phi = 4\pi Ga^2\delta p^N = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta p^N/\bar{\rho},
\end{aligned} \tag{92}
$$

这个方程组在改用宇宙时 t 时的结果为:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2\bar{\rho}\left[\delta^N + 3aH(1+w)v^N\right] \\
&\dot{\Phi} + H\Phi = 4\pi G a(\bar{\rho}+\bar{p})v^N \\
&\ddot{\Phi} + 4H\dot{\Phi} + \left(2\dot{H} + 3H^2\right)\Phi = 4\pi G\delta p^N.
\end{aligned} \tag{93}$$

我们定义一个规范不变的熵扰动:

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{H}\left(\frac{\delta p}{\bar{p}'} - \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'}\right) \equiv H\left(\frac{\delta p}{\dot{\bar{p}}} - \frac{\delta\rho}{\dot{\bar{\rho}}}\right) \tag{94}$$

结合背景中的关系:

$$\bar{\rho}' = -3\mathcal{H}(1+w)\bar{\rho} \qquad \bar{p}' = c_s^2\bar{\rho}' \tag{95}$$

熵扰动可以表达为:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{3(1+w)}\left(\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\delta p}{\bar{\rho}}\right) \tag{96}$$

改写上式:

$$\delta p^N/\bar{\rho} = c_s^2\left[\delta^N - 3(1+w)\mathcal{S}\right] \tag{97}$$

其中，由场方程的前两项:

$$\delta^N = -3\mathcal{H}(1+w)v^N + \frac{2}{3\mathcal{H}^2}\nabla^2\Phi = -\frac{2}{\mathcal{H}}\left(\Phi' + \mathcal{H}\Phi\right) + \frac{2}{3\mathcal{H}^2}\nabla^2\Phi \tag{98}$$

再结合场方程最后一式，可得标量扰动的演化方程（可作为练习）:

$$\mathcal{H}^{-2}\Phi'' + 3\left(1+c_s^2\right)\mathcal{H}^{-1}\Phi' + 3\left(c_s^2 - w\right)\Phi = c_s^2\mathcal{H}^{-2}\nabla^2\Phi - \frac{9}{2}c_s^2(1+w)\mathcal{S} \tag{99}$$

4.4 绝热扰动

绝热扰动的熵不变，即:

$$\mathcal{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta p = c_s^2\delta\rho \tag{100}$$

则在傅里叶空间中绝热扰动的演化方程可以化为（可作为练习）:

$$\mathcal{H}^{-2}\Phi''_{\vec{k}} + 3\left(1+c_s^2\right)\mathcal{H}^{-1}\Phi'_{\vec{k}} + 3\left(c_s^2 - w\right)\Phi_{\vec{k}} = -\left(\frac{c_s k}{\mathcal{H}}\right)^2\Phi_{\vec{k}} \tag{101}$$

改用宇宙时 t ，结果为:

$$H^{-2}\ddot{\Phi}_{\vec{k}} + \left(4+3c_s^2\right)H^{-1}\dot{\Phi}_{\vec{k}} + 3\left(c_s^2 - w\right)\Phi_{\vec{k}} = -\left(\frac{c_s k}{H}\right)^2\Phi_{\vec{k}} \tag{102}$$

此时扰动的演化是完全可解的。

若绝热演化发生在超视界尺度，条件为 $k \ll \mathcal{H}$，结合扰动的演化方程和状态方程与声速的背景关系，可以得到在超视界尺度的绝热扰动演化方程:

$$\ddot{\Phi} - \frac{1}{\dot{H}}(\ddot{H} - H\dot{H})\dot{\Phi} - \frac{1}{\dot{H}}\left(H\ddot{H} - 2\dot{H}^2\right)\Phi = 0 \tag{103}$$

解得（可作为练习）:

$$\Phi_{\vec{k}}(t) = A_{\vec{k}}\left(1 - \frac{H}{a}\int_0^t a\,dt\right) + B_{\vec{k}}\frac{H}{a} \tag{104}$$

4.5 正压理想流体的标量扰动

正压理想流体的状态方程如下:

$$p = p(\rho) \tag{105}$$

$$\frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} = \frac{dp}{d\rho} = c_s^2 \tag{106}$$

在这个条件下，扰动演化方程如下:

$$\Phi'' + 3\left(1 + c_s^2\right)\mathcal{H}\Phi' + 3\left(c_s^2 - w\right)\mathcal{H}^2\Phi + \left(c_s k\right)^2\Phi = 0 \tag{107}$$

再利用另外两个扰动方程，在傅里叶空间中可以得到:

$$\begin{aligned} v^N &= \frac{2k}{3(1+w)}\left(\mathcal{H}^{-2}\Phi' + \mathcal{H}^{-1}\Phi\right) \\ \delta^N &= -\frac{2}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\Phi - 3(1+w)\left(\frac{\mathcal{H}}{k}\right)v^N = -\frac{2}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\Phi - 2\left(\mathcal{H}^{-1}\Phi' + \Phi\right) \end{aligned} \tag{108}$$

至此我们已经基本完成了标量扰动演化方程的构建。

4.6 物质主导宇宙中的标量扰动

我们在解一个扰动问题时的思路如下:

1. 解出背景演化
2. 将背景量作为已知函数用于解扰动演化

在忽略压强的情况下，物质主导宇宙的近似条件为:

$$\bar{p} = w = c_s^2 = 0 \qquad \delta p = \Pi = 0 \tag{109}$$

在这个例子中，背景方程为:

$$\mathcal{H}^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 \tag{110}$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 \tag{111}$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = 0 \tag{112}$$

在此条件下尺度因子随共形时间的演化为:

$$a(\eta) \propto \eta^2 \tag{113}$$

带入背景的 Friedmann 方程:

$$4\pi G a^2\bar{\rho} = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 = \frac{6}{\eta^2} \tag{114}$$

在该情形下扰动演化的方程组为:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2\bar{\rho}\left[\delta^N + 3\mathcal{H}v^N\right] \tag{115}$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = 4\pi G a^2\bar{\rho}v^N \tag{116}$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + \left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right)\Phi = 0 \tag{117}$$

最后一式导出:

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' = \Phi'' + \frac{6}{\eta}\Phi' = 0 \tag{118}$$

$$\Phi(\eta, \vec{x}) = C_1(\vec{x}) + C_2(\vec{x})\eta^{-5} \tag{119}$$

可以看到 Φ 的随时间衰减部分可以很快被忽略，所以我们认为在物质主导宇宙中:

$$\Phi(\eta, \vec{x}) = \Phi(\vec{x}) \tag{120}$$

把 $\Phi' = 0$ 带入扰动演化方程组中，我们可以解出速度扰动:

$$v^N = \frac{\mathcal{H}\Phi}{4\pi G a^2 \bar{\rho}} = \frac{2\Phi}{3\mathcal{H}} = \frac{1}{3}\Phi\eta \propto \eta \propto a^{1/2} \propto t^{1/3} \tag{121}$$

相对密度扰动为:

$$\delta^N = -2\Phi + \frac{2}{3\mathcal{H}^2}\nabla^2\Phi \tag{122}$$

在傅里叶空间的解为:

$$\delta^N_{\vec{k}}(\eta) = -\left[2 + \frac{2}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\right]\Phi_{\vec{k}} \tag{123}$$

在超视界区域，近似为:

$$\delta^N_{\vec{k}} = -2\Phi_{\vec{k}} = \text{ const.} \tag{124}$$

在亚视界区域，近似为:

$$\delta_{\vec{k}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\Phi_{\vec{k}} \propto \eta^2 \propto a \propto t^{2/3} \tag{125}$$

上式表明相对密度扰动会在进入视界后正比于尺度因子增长。

4.7 辐射主导宇宙中的标量扰动

辐射主导的条件为:

$$p = \frac{1}{3}\rho \quad \Rightarrow \quad w = c_s^2 = \frac{1}{3} \qquad \bar{\rho} \propto a^{-4} \qquad \delta p = \frac{1}{3}\delta\rho \tag{126}$$

背景演化 Friedmann 方程为:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 \propto a^{-2} \Rightarrow a' = \text{ const} \tag{127}$$

背景解为:

$$a \propto \eta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \qquad \mathcal{H}' = -\frac{1}{\eta^2} \tag{128}$$

扰动演化方程最后一式为:

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta}\Phi' + \frac{1}{3}k^2\Phi = 0 \tag{129}$$

这个方程的解是一个球贝塞尔函数，最后近似后的结果是一个震荡解（可作为练习）:

$$\Phi_{\vec{k}}(\eta) \approx -3A_{\vec{k}}\frac{\cos\left(k\eta/\sqrt{3}\right)}{(k\eta)^2} \tag{130}$$

$$v^N_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\left(k\eta^2\Phi'_{\vec{k}} + k\eta\Phi_{\vec{k}}\right) \approx \frac{1}{2}k\eta^2\Phi'_{\vec{k}} \approx \frac{3}{2}A_{\vec{k}}c_s\sin\left(c_s k\eta\right) \tag{131}$$

$$\delta^N_{\vec{k}} \approx -\frac{2}{3}(k\eta)^2\Phi_{\vec{k}} \approx 2A_{\vec{k}}\cos\left(c_s k\eta\right) \tag{132}$$

5 规范

本节将讨论一些不同的规范选择。

5.1 共动规范

在共动规范下等时面与四速垂直，这意味着空间速度为 0，即：

$$v = B = 0 \tag{133}$$

又有规范变换式：

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= v + \xi' \\ \tilde{B} &= B + \xi' + \xi^0 \end{aligned} \tag{134}$$

于是从任意规范变换到共动规范的变换标量构造为：

$$\begin{aligned} \xi' &= -v \\ \xi^0 &= v - B \end{aligned} \tag{135}$$

于是有扰动的共动变换式：

$$A^C = A - (v-B)' - \mathcal{H}(v-B) \tag{136}$$
$$B^C = B - v + (v-B) = 0 \tag{137}$$
$$D^C = -\frac{1}{3}\nabla^2\xi + \mathcal{H}(v-B) \tag{138}$$
$$E^C = E + \xi \tag{139}$$
$$\psi^C \equiv -\mathcal{R} = \psi + \mathcal{H}(v-B) \tag{140}$$
$$\delta\rho^C = \delta\rho - \bar{\rho}'(v-B) = \delta\rho + 3\mathcal{H}(1+w)\bar{\rho}(v-B) \tag{141}$$
$$\delta p^C = \delta p - \bar{p}'(v-B) = \delta p + 3\mathcal{H}(1+w)c_s^2\bar{\rho}(v-B) \tag{142}$$
$$\delta^C = \delta + 3\mathcal{H}(1+w)(v-B) \tag{143}$$
$$v^C = v - v = 0 \tag{144}$$
$$\Pi^C = \Pi \tag{145}$$

注意上面一堆式子里还悄悄定义了曲率标量扰动：

$$\mathcal{R} \equiv -\psi^C \tag{146}$$

将上述规范变换用到牛顿规范，得到共动规范与牛顿规范的变换式：

$$\begin{aligned} A^C &= \Phi - v^{N'} - \mathcal{H}v^N \\ \mathcal{R} &= -\Psi - \mathcal{H}v^N \\ E^{C'} &= -v^N \\ \delta\rho^C &= \delta\rho^N + 3\mathcal{H}(1+w)\bar{\rho}v^N \\ \delta p^C &= \delta p^N + 3\mathcal{H}(1+w)c_s^2\bar{\rho}v^N \\ \delta^C &= \delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N \end{aligned} \tag{147}$$

5.2 混合规范

在牛顿规范下，有如下限制方程：

$$\nabla^2\Psi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\left[\delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N\right] \tag{148}$$

把右边换成共动规范下的式子，则有：

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G a^2\bar{\rho}\delta^C \tag{149}$$

则式子的左边用的是牛顿规范，右边则是共动规范。这个等号是可取的，虽然规范不同，但等式两边的量实际就应该相等。

实际上:

$$\delta^C = \delta + 3\mathcal{H}(1+w)(v-B) \tag{150}$$

是一个规范不变量。

我们将物质扰动写成共动规范，速度扰动写成牛顿规范，爱因斯坦场方程与守恒方程可以写为（可作为练习）:

$$\nabla^2\Psi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta^C \tag{151}$$

$$\Psi - \Phi = 3\mathcal{H}^2 w\Pi \tag{152}$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+w)v^N \tag{153}$$

$$\Psi'' + \left(2+3c_s^2\right)\mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}\Phi' + 3\left(c_s^2 - w\right)\mathcal{H}^2\Phi + \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\frac{\delta p^C}{\bar{\rho}} \tag{154}$$

$$\delta_C' - 3\mathcal{H}w\delta_C = (1+w)\nabla^2 v^N + 2\mathcal{H}w\nabla^2\Pi \tag{155}$$

$$v_N' + \mathcal{H}v_N = \frac{\delta p^C}{\bar{\rho}+\bar{p}} + \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi + \Phi \tag{156}$$

5.3 共动曲率扰动

有上节倒数第四式可得:

$$v^N = \frac{2}{3\mathcal{H}^2(1+w)}\left(\Psi' + \mathcal{H}\Phi\right) \tag{157}$$

我们由此可以得到共动曲率扰动和 Bardeen 势的关系（可作为练习）:

$$\mathcal{R} = -\Psi - \frac{2}{3(1+w)}\left(\mathcal{H}^{-1}\Psi' + \Phi\right) \tag{158}$$

上式可改写为共动曲率扰动的演化方程（可作为练习）:

$$\frac{3}{2}(1+w)\mathcal{H}^{-1}\mathcal{R}' = \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\left[c_s^2\Psi + \frac{1}{3}(\Psi - \Phi)\right] + \frac{9}{2}c_s^2(1+w)\mathcal{S} \tag{159}$$

其中:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{3(1+w)}\left(\delta - \frac{1}{c_s^2}\frac{\delta p}{\bar{\rho}}\right) \Rightarrow \delta p = c_s^2[\delta\rho - 3(\bar{\rho}+\bar{p})\mathcal{S}] \tag{160}$$

可以发现，对于绝热扰动，共动曲率扰动在视界外是一个常数。

演化方程可以完全变为共动规范:

$$\mathcal{H}^{-1}\mathcal{R}' = -\frac{\delta p^C}{\bar{\rho}+\bar{p}} - \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi = -c_s^2\left(\frac{\delta^C}{1+w} - 3\mathcal{S}\right) - \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi \tag{161}$$

5.4 理想流体标量扰动再讨论

在理想流体条件下，混合规范中的场方程与守恒方程如下:

$$\nabla^2\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta_C \tag{162}$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+w)v_N \tag{163}$$

$$\Phi'' + 3\left(1+c_s^2\right)\mathcal{H}\Phi' + 3\left(c_s^2 - w\right)\mathcal{H}^2\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\frac{\delta p_C}{\bar{\rho}} \tag{164}$$

$$\delta_C' - 3\mathcal{H}w\delta_C = (1+w)\nabla^2 v_N \tag{165}$$

$$v_N' + \mathcal{H}v_N = \frac{\delta p_C}{\bar{\rho}+\bar{p}} + \Phi \tag{166}$$

共动曲率扰动及其演化如下:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} &= -\Phi - \frac{2}{3(1+w)\mathcal{H}}\left(\Phi' + \mathcal{H}\Phi\right) \\
\mathcal{H}^{-1}\mathcal{R}' &= -\frac{\delta p^C}{\bar{\rho}+\bar{p}} = -c_s^2\left(\frac{\delta^C}{1+w} - 3\mathcal{S}\right)
\end{aligned} \tag{167}
$$

联立上面的一些方程可以推出 Bardeen 方程（可作为练习）：

$$
\mathcal{H}^{-2}\delta_C'' + \left(1 - 6w + 3c_s^2\right)\mathcal{H}^{-1}\delta_C' - \frac{3}{2}\left(1 + 8w - 6c_s^2 - 3w^2\right)\delta_C = c_s^2\mathcal{H}^{-2}\nabla^2\left[\delta_C - 3(1+w)\mathcal{S}\right] \tag{168}
$$

共动曲率扰动可以写成如下方程:

$$
\frac{2}{3}\mathcal{H}^{-1}\Phi' + \frac{5+3w}{3}\Phi = -(1+w)\mathcal{R} \tag{169}
$$

假设某一时期状态方程基本为常数，对于超视界的绝热理想流体，上述方程有一特解:

$$
\Phi = -\frac{3+3w}{5+3w}\mathcal{R} \tag{170}
$$

我们可以忽略方程的通解，因为其衰减较快。

所以在状态方程基本不变的假设下:

$$
\Phi = \Psi = -\frac{3+3w}{5+3w}\mathcal{R} = \text{ const} \tag{171}
$$

5.5 同步规范

同步规范的定义要求为:

$$
A = B_i = 0 \tag{172}
$$

于是构造的规范变换为:

$$
\begin{aligned}
\xi^{0'} + \mathcal{H}\xi^0 &= A \\
\xi' &= -\xi^0 - B
\end{aligned} \tag{173}
$$

在同步规范下度规扰动只存在空间部分:

$$
\begin{aligned}
h_{ij} &= -2D^Z\delta_{ij} + 2\left(E^Z_{,ij} - \frac{1}{3}\nabla^2 E^Z\delta_{ij}\right) \\
&= -2\psi^Z\delta_{ij} + 2E^Z_{,ij} \\
ds^2 &= a^2\left\{-d\eta^2 + \left[(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}\right]dx^i dx^j\right\}
\end{aligned} \tag{174}
$$

定义如下标量记号:

$$
\begin{aligned}
& h \equiv -6D^Z \equiv h_i^{iZ} \\
& \eta \equiv \psi^Z = D^Z + \frac{1}{3}\nabla^2 E^Z \\
& \mu \equiv 2E^Z
\end{aligned} \tag{175}
$$

在此记号下，空间扰动为:

$$
\begin{aligned}
h_{ij} &= \frac{1}{3}h\delta_{ij} + \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\mu \\
&= -2\eta\delta_{ij} + \mu_{,ij}
\end{aligned} \tag{176}
$$

从同步规范到牛顿规范:

$$
\begin{aligned}
\xi_{Z\to N} &= -\frac{1}{k}E^Z = -\frac{1}{2k}\mu = \frac{1}{2k}(h + 6\eta) \\
\xi^0_{Z\to N} &= +\frac{1}{k^2}E^{Z'} = -\frac{1}{k}\xi'_{Z\to N} = +\frac{1}{2k^2}\mu'
\end{aligned} \tag{177}
$$

于是 Bardeen 势可以写为:

$$
\begin{aligned}
\Phi &= -\frac{1}{k^2}\left(\mathcal{H}E^{Z'}+E^{Z''}\right)=\frac{1}{2k^2}\left(-\mathcal{H}\mu'-\mu''\right)=\frac{1}{2k^2}\left[h''+6\eta''+\mathcal{H}\left(h'+6\eta'\right)\right] \\
\Psi &= \psi^Z+\frac{1}{k^2}\mathcal{H}E^{Z'}=\eta-\frac{1}{2k^2}\mathcal{H}\left(h'+6\eta'\right)
\end{aligned}
\tag{178}
$$

在同步规范下爱因斯坦场方程为:

$$
\begin{aligned}
& k^2\eta-\frac{1}{2}\mathcal{H}h'=-4\pi Ga^2\delta\rho^Z=-\frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta^Z \\
& k^2\eta'=4\pi Ga^2(\bar\rho+\bar p)kv^Z=\frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+w)kv^Z \\
& h''+2\mathcal{H}h'-2k^2\eta=-24\pi Ga^2\delta p^Z=-9\mathcal{H}^2\frac{\delta p^Z}{\bar\rho} \\
& h''+6\eta''+2\mathcal{H}h'+12\mathcal{H}\eta'-2k^2\eta=-16\pi Ga^2\bar p\Pi=-6\mathcal{H}^2w\Pi
\end{aligned}
\tag{179}
$$

守恒方程为:

$$
\begin{aligned}
\delta\rho^{Z'} &= -3\mathcal{H}\left(\delta\rho^Z+\delta p^Z\right)-(\bar\rho+\bar p)\left(\frac{1}{2}h'+kv^Z\right) \\
(\bar\rho+\bar p)v^{Z'} &= -(\bar\rho+\bar p)'v^Z-4\mathcal{H}(\bar\rho+\bar p)v^Z+k\delta p^Z-\frac{2}{3}k\bar p\Pi \\
\delta^{Z'} &= -(1+w)\left(kv^Z+\frac{1}{2}h'\right)+3\mathcal{H}\left(w\delta^Z-\frac{\delta p^Z}{\bar\rho}\right) \\
v^{Z'} &= -\mathcal{H}(1-3w)v^Z-\frac{w'}{1+w}v^Z+\frac{k\delta p^Z}{\bar\rho+\bar p}-\frac{2}{3}\frac{w}{1+w}k\Pi
\end{aligned}
\tag{180}
$$

6 多成分流体扰动

本节将从单一流体转向多流体。

6.1 流体成分的基本量

流体在作为成分时，我们有如下定义:

$$\bar T^\mu_\nu=\sum_i \bar T^\mu_{\nu(i)} \qquad \delta T^\mu_\nu=\sum_i \delta T^\mu_{\nu(i)} \tag{181}$$

$$\bar\rho=\sum\bar\rho_i \tag{182}$$

$$\bar p=\sum\bar p_i=\sum w_i\bar\rho_i \tag{183}$$

$$w\equiv\frac{\bar p}{\bar\rho}=\sum\frac{\bar\rho_i}{\bar\rho}w_i \tag{184}$$

$$c_s^2\equiv\frac{\bar p'}{\bar\rho'}=\frac{\sum\bar p_i'}{\bar\rho'}=\sum\frac{\bar\rho_i'}{\bar\rho'}c_i^2 \tag{185}$$

$$w_i\equiv\frac{\bar p_i}{\bar\rho_i} \qquad c_i^2\equiv\frac{\bar p_i'}{\bar\rho_i'} \tag{186}$$

$$\delta\rho=\sum\delta\rho_i=\sum\bar\rho_i\delta_i \tag{187}$$

$$\delta p=\sum\delta p_i \tag{188}$$

$$\delta\equiv\frac{\delta\rho}{\bar\rho}=\sum\frac{\bar\rho_i}{\bar\rho}\delta_i \tag{189}$$

$$\delta_i\equiv\delta\rho_i/\bar\rho_i \tag{190}$$

由 δT^l_0 有（可作为练习）:

$$
\begin{align}
(\bar{\rho}+\bar{p})v_l &= \sum(\bar{\rho}_i+\bar{p}_i)v_{l(i)} \tag{191}\\
v_l &= \sum\frac{\bar{\rho}_i+\bar{p}_i}{\bar{\rho}+\bar{p}}v_{l(i)} = \sum\frac{1+w_i}{1+w}\frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}}v_{l(i)} \tag{192}\\
\Sigma_{lm} &= \sum\Sigma_{lm(i)} = \sum\bar{p}_i\Pi_{lm(i)} \tag{193}\\
\Pi_{lm(i)} &\equiv \Sigma_{lm(i)}/\bar{p}_i \tag{194}\\
\Pi_{lm} &\equiv \frac{\Sigma_{lm}}{\bar{p}} = \sum\frac{\bar{p}_i}{\bar{p}}\Pi_{lm(i)} = \sum\frac{w_i\bar{\rho}_i}{w\bar{\rho}}\Pi_{lm(i)} \tag{195}
\end{align}
$$

流体成分的规范变换:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\delta\rho}_i &= \delta\rho_i - \bar{\rho}_i'\xi^0\\
\widetilde{\delta p}_i &= \delta p_i - \bar{p}_i'\xi^0\\
\tilde{v}_i &= v_i + \xi'\\
\tilde{\Pi}_i &= \Pi_i\\
\tilde{\delta}_i &= \delta_i - \frac{\bar{\rho}_i'}{\bar{\rho}_i}\xi^0
\end{aligned} \tag{196}
$$

定义熵扰动:

$$
S_{ij} \equiv -3\mathcal{H}\left(\frac{\delta\rho_i}{\bar{\rho}_i'} - \frac{\delta\rho_j}{\bar{\rho}_j'}\right) \tag{197}
$$

6.2 流体成分的方程

对于没有相互作用的流体，背景守恒方程:

$$
\bar{\rho}_i' = -3\mathcal{H}\left(\bar{\rho}_i+\bar{p}_i\right) \tag{198}
$$

所以声速可以写为:

$$
c_s^2 = \sum\frac{\bar{\rho}_i+\bar{p}_i}{\bar{\rho}+\bar{p}}c_i^2 \tag{199}
$$

熵扰动写成:

$$
S_{ij} = \frac{\delta\rho_i}{(1+w_i)\bar{\rho}_i} - \frac{\delta\rho_j}{(1+w_j)\bar{\rho}_j} = \frac{\delta_i}{1+w_i} - \frac{\delta_j}{1+w_j} \tag{200}
$$

于是带入了背景的规范变换方程如下:

$$
\begin{aligned}
\delta\rho_i^C &= \delta\rho_i^N + 3\mathcal{H}\left(1+w_i\right)\bar{\rho}_i v^N\\
\delta p_i^C &= \delta p_i^N + 3\mathcal{H}\left(1+w_i\right)c_i^2\bar{\rho}_i v^N\\
\delta_i^C &= \delta_i^N + 3\mathcal{H}\left(1+w_i\right)v^N
\end{aligned} \tag{201}
$$