

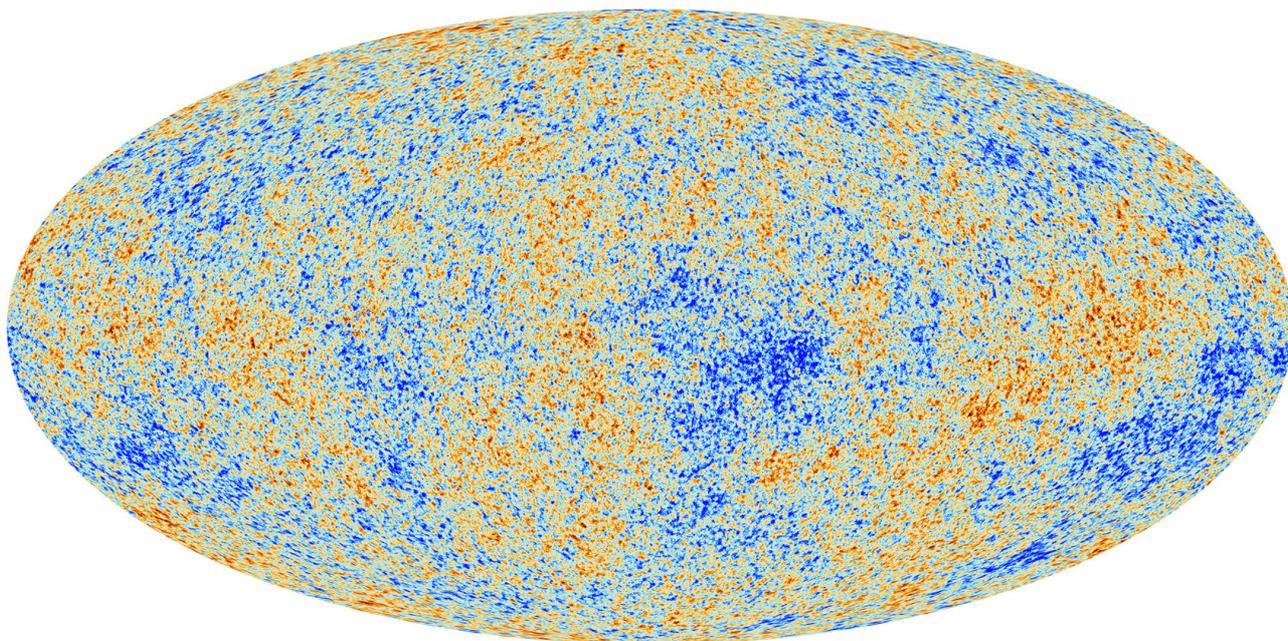
宇宙微波背景辐射（CMB）

1 角功率谱

本节主要介绍 CMB 角功率谱相关知识。

1.1 CMB 简介

CMB 在大尺度上有极高的各向异性，但精确测量可以发现微小的各向异性，这反映了宇宙的原初扰动。



我们接收到的 CMB 光子来自我们过去的光锥与退耦时期的等时超曲面的相交部分，很显然这是一个球面的一部分，我们称之为最后散射截面（是个类空超曲面），我们位于这个球体的中心。

我们观察到的各向异性主要来自两个方面：

- 光子在最后散射截面固有的温度差异
- 光子在传播过程中受到不同的引力红移而引起的差异

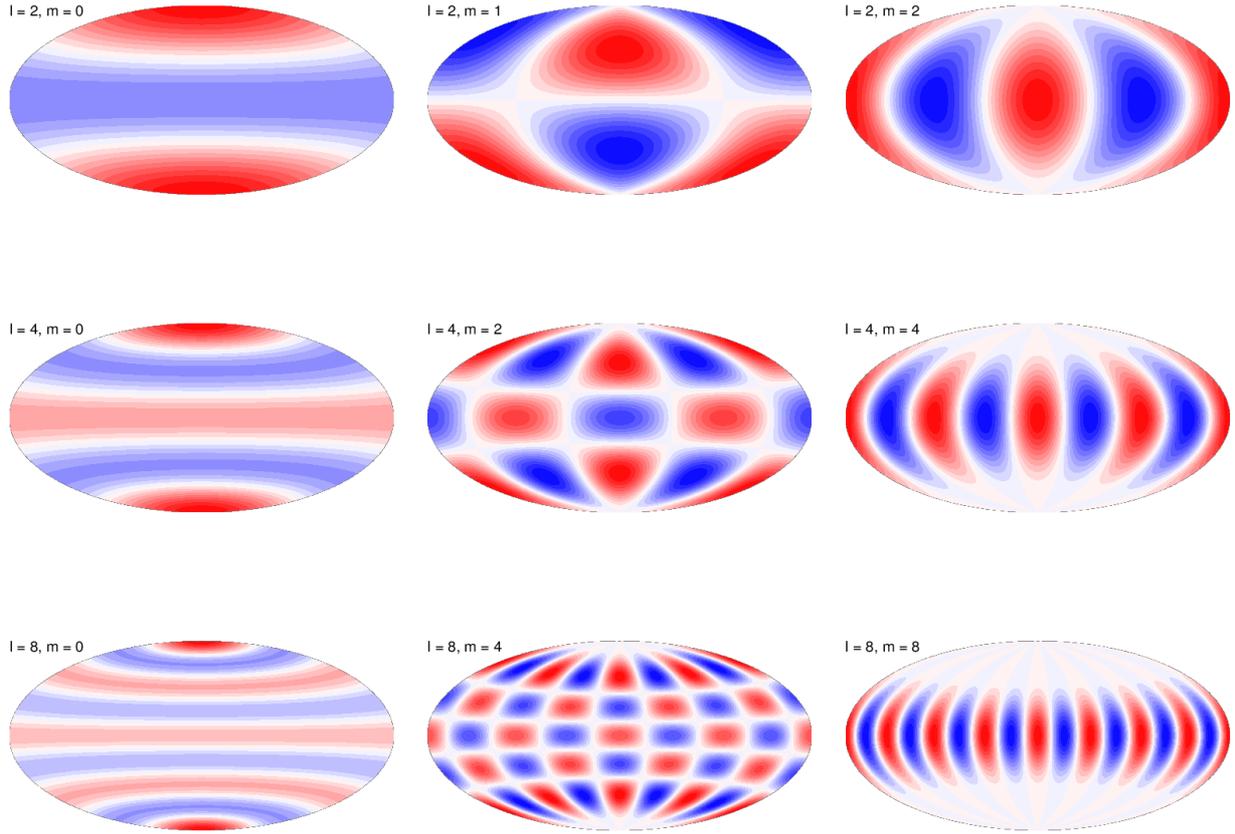
$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{观测}} = \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{固有}} + \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{传播}} \quad (1)$$

1.2 球谐函数展开

CMB 的温度各向异性可以看做是一个建立在天球坐标上的方程，我们可以用球谐函数将其多极展开：

$$\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \sum a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (2)$$

直观来讲： ℓ 决定了各向异性图案的大小， m 决定了图案的指向或形状。 ℓ 越小，代表空间频率更低，意味着更大的尺度。球谐函数的图像如下图所示：



更有用的是多极系数，他反映了 CMB 是用球谐函数由何种方式组成的：

$$a_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) d\Omega \quad (3)$$

而球谐函数可以写成连带勒让德函数：

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (4)$$

1.3 理论角功率谱

考虑一阶扰动理论，我们认为多极系数是高斯型随机变量，其期望为 0：

$$\langle a_{\ell m} \rangle = 0 \quad (5)$$

可以证明 $a_{\ell m}$ 是独立随机变量：

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = 0 \quad \ell \neq \ell' \text{ 或 } m \neq m' \quad (6)$$

我们想要得到的是 $a_{\ell m}$ 的方差，即 $\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$ ，在统计上它对 m 是简并的，因为 m 的改变只会导致球谐函数形状和指向的改变，并不会使其大小发生变化，我们定义：

$$C_{\ell} \equiv \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell+1} \sum_m \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle \quad (7)$$

通过定义可以得到 $a_{\ell m}$ 的正交性：

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{\ell} \quad (8)$$

C_ℓ 被称为角功率谱，对于高斯型的扰动，它包含了 CMB 各向异性的全部信息，而这些信息我们是可以通过理论预言的。分析 CMB 各向异性的工作就相当于从 CMB 温度各向异性的观测数据来反推角功率谱，并且与理论预言相比较。

实际上 CMB 温度各向异性和角功率谱是相互关联的（可作为练习）：

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\delta T(\theta, \phi)}{T} \right)^2 \right\rangle &= \left\langle \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \sum_{\ell' m'} a_{\ell' m'}^* Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) \right\rangle \\ &= \sum_{\ell \ell'} \sum_{m m'} Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle \\ &= \sum_{\ell} C_{\ell} \sum_m |Y_{\ell m}(\theta, \phi)|^2 = \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_{\ell} \end{aligned} \quad (9)$$

上式推导的最后一步用到了球谐函数的性质：

$$\sum_m |Y_{\ell m}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2\ell+1}{4\pi} \quad (10)$$

所以如果我们画出 $\frac{2\ell+1}{4\pi} C_{\ell}$ 的函数曲线，曲线的积分面积就是温度偏离平均温度的方差。

然而现在的问题在于 $\frac{2\ell+1}{4\pi} C_{\ell}$ 貌似和方向无关，但显然在观测上应该是有关的，原因是这里的平均代表了将所有可能的满足 C_{ℓ} 的 CMB 的平均，当然就没有哪一个角度更为特殊。

换句话说，我们在理论计算角功率谱时考虑的是高斯型 $a_{\ell m}$ ，而平均的意义就在于我们的假设可以导出无数多个不同行为的宇宙，每个宇宙的温度涨落是各向异性的，但将无数多个宇宙求方差各向异性就被消除了，自然与角度无关。

对于两个不同的指向 $\hat{\mathbf{n}} = (\theta, \phi)$, $\hat{\mathbf{n}}' = (\theta', \phi')$ ，我们可以定义一个角关联函数：

$$C(\vartheta) \equiv \left\langle \frac{\delta T(\hat{\mathbf{n}})}{T} \frac{\delta T(\hat{\mathbf{n}}')}{T} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell+1) C_{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta) \quad (11)$$

其中 ϑ 是两个指向的夹角。

1.4 观测角功率谱

上节提到我们可以得到多极系数 $a_{\ell m}$ 的方差 $\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$ ，但仔细想想我们只有一个宇宙，一个 CMB，一套 $a_{\ell m}$ ，哪里来的平均？所以我们只能用我们宇宙的 CMB 来计算角功率谱，我们定义观测角功率谱：

$$\hat{C}_{\ell} = \frac{1}{2\ell+1} \sum_m |a_{\ell m}|^2 \quad (12)$$

我们应该注意到其形式与理论的定义相比少了平均这一步操作。

按照定义，我们观测的温度涨落的方差是对温度涨落的平方求平均，即：

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{\delta T(\theta, \phi)}{T} \right]^2 d\Omega &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \sum_{\ell' m'} a_{\ell' m'}^* Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \underbrace{\int Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) d\Omega}_{\delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} \underbrace{\sum_m |a_{\ell m}|^2}_{(2\ell+1)\hat{C}_{\ell}} = \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} \hat{C}_{\ell} \end{aligned} \quad (13)$$

1.5 宇宙方差

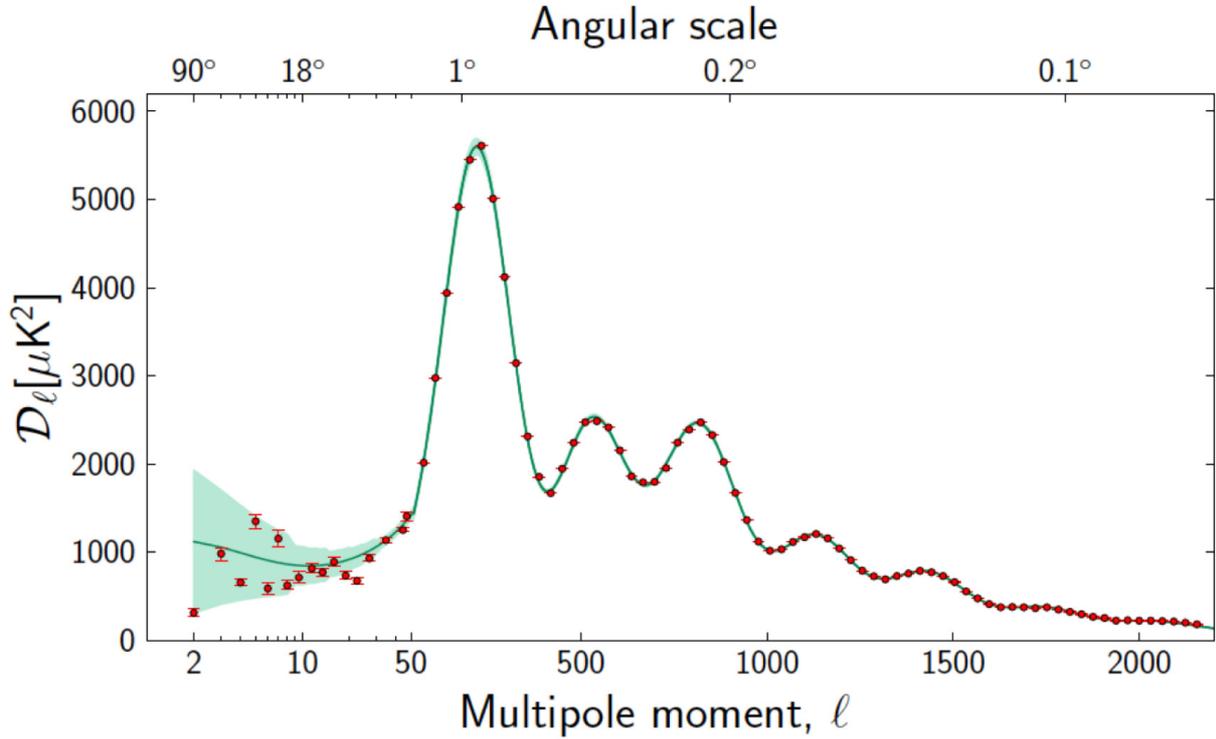
我们希望观测角功率谱的期望应该等于理论角功率谱：

$$\langle \hat{C}_\ell \rangle = C_\ell \Rightarrow \langle \hat{C}_\ell - C_\ell \rangle = 0 \quad (14)$$

但实际上是有偏差的，我们定义他们间的方差，称之为宇宙方差（可作为练习）：

$$\langle (\hat{C}_\ell - C_\ell)^2 \rangle = \frac{2}{2\ell + 1} C_\ell^2 \quad (15)$$

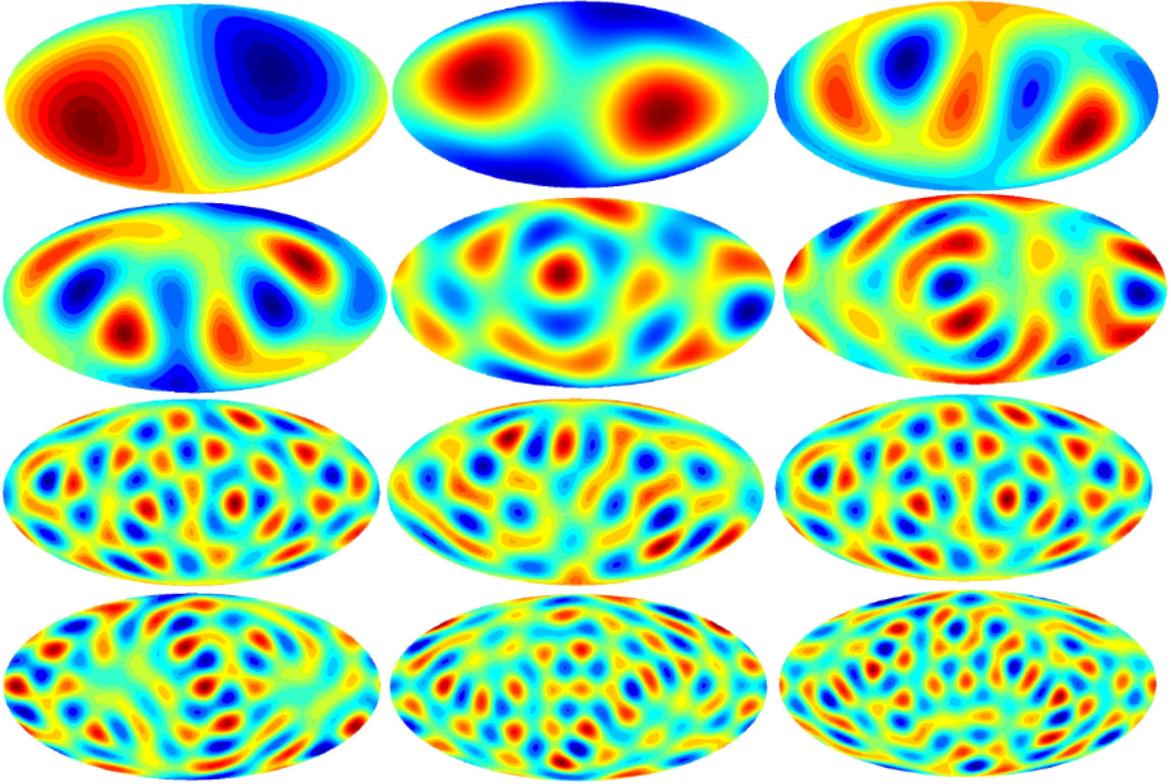
宇宙方差限制了 CMB 观测值与理论比较的准确性，在大尺度上影响显著，如图：



红色为观测结果，绿线为理论拟合结果，不色的图案就是宇宙方差所确定的精确范围。

1.6 多极子与尺度

前文提到，多极子数与尺度大小有关： ℓ 越小，尺度越大； ℓ 越大，尺度越小。原因是 ℓ 表征了球谐函数的空间频率，如下图所示，仔细看可以看出类似波动的周期性空间分布：



具体地，给定一个 ℓ ，一个波动周期的角度定义为：

$$\vartheta_\lambda = \frac{2\pi}{\ell} = \frac{360^\circ}{\ell} \quad (16)$$

我们要求望远镜能够分辨一个周期内的最高和最低温度，那就是半个周期的波长，于是我们定义最小分辨角：

$$\vartheta_{\text{res}} = \frac{\pi}{\ell} = \frac{180^\circ}{\ell} \quad (17)$$

与此同时，我们可以将其与角直径距离联系，定义共动角直径距离：

$$d_A^c \equiv \frac{\lambda^c}{\vartheta} = a^{-1}d_A \quad (18)$$

其中共动波长 $\lambda^c = a^{-1}\lambda_{\text{phys}} = (1+z)\lambda_{\text{phys}} = 2\pi/k$ 。

由此得出共动波数与多极子数的关系：

$$\ell = kd_A^c \quad (19)$$

这只是一个粗略的估计，精确的关系需要用到平面波的球谐函数分解：

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(kx) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (20)$$

考虑一个函数的傅里叶展开：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (21)$$

则多极系数改写为：

$$\begin{aligned}
a_{\ell m} &= \int d\Omega_x Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{x}}) f(x\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \int d\Omega_x Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{x}}) f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= 4\pi \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\ell'm'} \int d\Omega_x f_{\mathbf{k}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{x}}) i^{\ell'} j_{\ell'}(kx) Y_{\ell'm'}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{\ell'm'}^*(\hat{\mathbf{k}}) \\
&= 4\pi i^{\ell} \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} j_{\ell}(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}})
\end{aligned} \tag{22}$$

还可以改写为积分：

$$a_{\ell m} = \frac{4\pi i^{\ell}}{(2\pi)^3} \int d^3k f(\mathbf{k}) j_{\ell}(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \tag{23}$$

2 CMB 各向异性的扰动理论

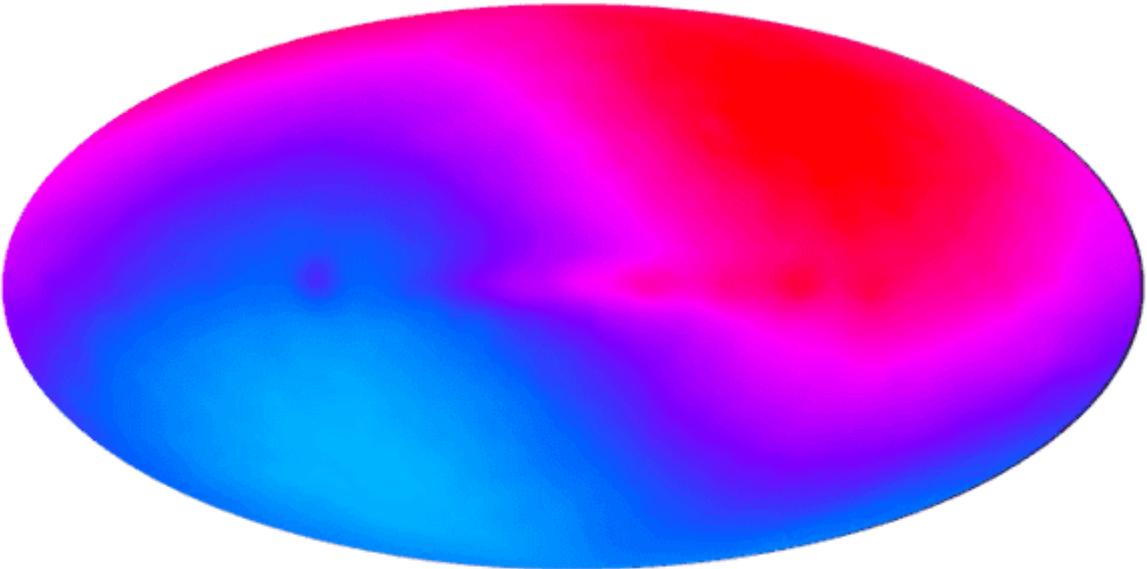
本节推导了 CMB 各向异性的形成的扰动理论。

2.1 温度涨落理论式

在传播途中牛顿规范下的温度变化可以由如下公式给出：

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{传播}} &= - \int d\Phi + \int (\dot{\Phi} + \dot{\Psi}) dt + \mathbf{v}_{\text{obs}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
&= \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) - \Phi(t_0, \mathbf{0}) + \int (\dot{\Phi} + \dot{\Psi}) dt + \mathbf{v}_{\text{obs}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
&\approx \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) - \Phi(t_0, \mathbf{0}) + 2 \int \dot{\Phi} dt + \mathbf{v}_{\text{obs}} \cdot \hat{\mathbf{n}}
\end{aligned} \tag{24}$$

这个式子分为三部分：第一部分为最后散射截面和观测位置的引力势之差；第二部分为传播途中的引力红移；第三部分为由于观测者相对 CMB 参考系运动（银河系自转）造成的多普勒效应，它引起了 CMB 天图上的偶极矩，如下图。其中最后一式用到了理想流体近似。



考虑到观测点的引力势对 CMB 观测产生的效果是各向同性的，且暂时不考虑多普勒效应，则传播过程中温度扰动化简为：

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{传播}} = \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \tag{25}$$

固有部分的扰动来自于光子的能量涨落和流体运动产生的多普勒效应。

积分光子的玻色-爱因斯坦分布可以得到光子密度与温度关系为：

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4 \quad (26)$$

扰动理论还定义了相对密度扰动：

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \quad (27)$$

经过微分运算后得出固有温度涨落的表达式：

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{固有}} = \frac{1}{4}\delta_\gamma - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (28)$$

其中还包含了流体流速的涨落造成的固有温度涨落。

所以现在的温度涨落理论式为：

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{观测}} = \frac{1}{4}\delta_\gamma^N - \mathbf{v}^N \cdot \hat{\mathbf{n}} + \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \quad (29)$$

我们通常讨论原初的绝热扰动，条件为：

$$\delta_b = \delta_c \equiv \delta_m = \frac{3}{4}\delta_\gamma \quad (30)$$

2.2 Sachs–Wolfe 效应

我们考虑超视界尺度的绝热温度扰动，并认为在退耦时已经是物质主导，条件为：

$$k \ll k_{\text{dec}} \text{ or } \ell \ll \ell_H \quad (31)$$

$$\frac{1}{4}\delta_\gamma = \frac{1}{3}\delta_m \approx \frac{1}{3}\delta \quad (32)$$

由于是超视界的扰动，流体速度造成的多普勒红移可以忽略，于是温度涨落方程变为：

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{obs}} = \frac{1}{3}\delta^N + \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \quad (33)$$

由扰动理论可以导出密度扰动方程：

$$\delta_{\mathbf{k}}^N = - \left[2 + \frac{2}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \right] \Phi_{\mathbf{k}} \quad (34)$$

超视界假设下上式近似为：

$$\delta^N \approx -2\Phi \quad (35)$$

于是温度涨落方程进一步简化：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{观测}} &= -\frac{2}{3}\Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \\ &= \frac{1}{3}\Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \end{aligned} \quad (36)$$

上述方程所描述的就是 Sachs–Wolfe 效应，式子的第一部分称为普通 Sachs–Wolfe 效应，第二部分被称为积分 Sachs–Wolfe 效应 (ISW)。

由扰动理论，在物质主导时，视界外的势扰动为常数，我们可以在讨论超视界扰动时忽略 ISW 效应。

所以普通 Sachs–Wolfe 效应的温度涨落可以写为：

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{SW}} = \frac{1}{3}\Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) \quad (37)$$

这是功率谱低频部分的主导因素。

现在我们得到了低频部分的温度涨落，带入公式可以得到多极系数：

$$a_{\ell m} = 4\pi i^\ell \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{3}\Phi_{\mathbf{k}} j_\ell(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (38)$$

有扰动理论定义了共动曲率扰动，在物质主导时有如下关系：

$$\Phi = -\frac{3}{5}\mathcal{R} \quad (39)$$

所以多极系数计算式为：

$$a_{\ell m} = -\frac{4\pi}{5} i^\ell \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}} j_\ell(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (40)$$

利用共动曲率扰动和功率谱的关系：

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \frac{1}{4\pi k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \quad (41)$$

可以推出角功率谱（可作为练习）：

$$\begin{aligned} C_\ell &\equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_m \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle \\ &= \frac{16\pi^2}{25} \frac{1}{2\ell+1} \sum_m \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{4\pi k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_\ell(kx)^2 |Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}})|^2 \\ &= \frac{1}{25} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_\ell(kx)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

改写成积分式：

$$\begin{aligned} C_\ell &= \frac{1}{25} \int \frac{d^3 k}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_\ell(kx)^2 \\ &= \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_\ell(kx)^2 \end{aligned} \quad (43)$$

对于一个尺度不变功率谱：

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \text{const} = A_s^2 \quad (44)$$

带入积分得到角功率谱：

$$C_\ell = A_s^2 \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{dk}{k} j_\ell(kx)^2 = \frac{A_s^2}{25} \frac{2\pi}{\ell(\ell+1)} \quad (45)$$

变换一下方程的形式，我们得到：

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_\ell = \frac{A_s^2}{25} = \text{const} \quad (46)$$

这也是多数文献通常用来绘制功率谱的量，显然它可以将尺度不变原初功率谱的普通 Sachs–Wolfe 效应抹平。

2.3 声学震荡

考虑亚视界尺度的温度涨落：

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{obs}} = \frac{1}{4}\delta_\gamma(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) - \mathbf{v}_\gamma \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \quad (47)$$

定义一个单极子，其贡献为局部温度扰动：

$$\Theta_0 \equiv \frac{1}{4}\delta_\gamma \quad (48)$$

我们之前学习过一个流体成分非相对论扰动方程：

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}i} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}i} = -\frac{k^2}{a^2} \left(\frac{\delta p_{\mathbf{k}i}}{\bar{\rho}_i} + \Phi_{\mathbf{k}} \right) \quad (49)$$

若不考虑膨胀，加入压强的修正，上式化为：

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}i} + k^2 \left[\frac{\delta p_{\mathbf{k}i}}{\bar{\rho}_i} + (1 + w_i)\Phi_{\mathbf{k}} \right] = 0 \quad (50)$$

现在我们考虑的成分是重子-光子流体，在原初绝热扰动的条件下方程化为：

$$\ddot{\delta}_{b\gamma\mathbf{k}} + k^2 [c_s^2 \delta_{b\gamma\mathbf{k}} + (1 + w_{b\gamma})\Phi_{\mathbf{k}}] = 0 \quad (51)$$

且有以下关系：

$$c_s^2 = \frac{\delta p_{b\gamma}}{\delta \rho_{b\gamma}} \approx \frac{\delta p_\gamma}{\delta \rho_{b\gamma}} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho_\gamma}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_b} = \frac{1}{3} \frac{\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma + \bar{\rho}_b \delta_b} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_\gamma}} \equiv \frac{1}{3} \frac{1}{1 + R} \quad (52)$$

其中定义：

$$R \equiv \frac{3}{4} \frac{\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_\gamma} \quad (53)$$

于是有重子-光子流体的状态方程：

$$w_{b\gamma} \equiv \frac{\bar{p}_{b\gamma}}{\bar{\rho}_{b\gamma}} = \frac{\frac{1}{3}\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_b} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{4}{3}R} \quad (54)$$

$$1 + w_{b\gamma} = \frac{\frac{4}{3}(1 + R)}{1 + \frac{4}{3}R}$$

带入原扰动方程，简化为：

$$\ddot{\delta}_{b\gamma\mathbf{k}} + k^2 \left[\frac{1}{3} \frac{1}{1 + R} \delta_{b\gamma\mathbf{k}} + \frac{\frac{4}{3}(1 + R)}{1 + \frac{4}{3}R} \Phi_{\mathbf{k}} \right] = 0 \quad (55)$$

由于我们感兴趣的是光子扰动，重子-光子扰动与光子扰动有如下关系：

$$\delta_{b\gamma} = \frac{\delta \rho_{b\gamma}}{\bar{\rho}_{b\gamma}} = \frac{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_b}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_b} = \frac{\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma + \bar{\rho}_b \delta_b}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_b} = \frac{1 + R}{1 + \frac{4}{3}R} \delta_\gamma \quad (56)$$

现在可以重写出光子扰动的谐振子方程：

$$\ddot{\Theta}_{0\mathbf{k}} + c_s^2 k^2 [\Theta_{0\mathbf{k}} + (1 + R)\Phi_{\mathbf{k}}] = 0 \quad (57)$$

如果我们认为 R 和 $\Phi_{\mathbf{k}}$ 都为常数，我们可以得到如下解：

$$\Theta_{0\mathbf{k}} + \Phi_{\mathbf{k}} = -R\Phi_{\mathbf{k}} + A_{\mathbf{k}} \cos c_s k t + B_{\mathbf{k}} \sin c_s k t \quad (58)$$

上述组合被称为有效温度扰动，代表局部温度扰动减去光子在爬出势阱时的红移。我们发现这个量在某一个常值附近震荡。

我们额外定义一个声学视界，它代表了声音传播的共动距离：

$$r_s(t) \equiv \int_0^{\eta} c_s d\eta = \int_0^t \frac{c_s(t)}{a(t)} dt \quad (59)$$

3 宇宙学参数与 CMB 各向异性

宇宙学有 7 个标准参数：

- Ω_0 : 总密度参数
- Ω_Λ : 真空能密度参数
- A_s : 原初标量扰动幅值
- n_s : 原初功率谱谱指数
- τ : 再电离光深
- $\omega_b \equiv \Omega_b h^2$: 重子密度参数
- $\omega_m \equiv \Omega_m h^2$: 物质密度参数